

Support de cours

Cours:

**PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet)**

Vidéo:

## **12 - Cinématique et dynamique du solide indéformable**

Concepts (extraits des sous-titres générés automatiquement) :

**Point matériel. Mouvements de rotation propres. Modèle du solide indéformable. Aide d'angles. Vecteur vitesse angulaire. Vecteur moment cinétique. Mouvements de rotation. Dynamique du solide indéformable. Angles possibles. Mouvement relatif. Modèle du point matériel. Plan horizontal. Axe horizontal. Premier vecteur. Carton de galaxus.**



[vers la recherche de séquences vidéo](#)

(dans PHYS-101(f) - PG I - mécanique - MA (Sylvain Bréchet).)



[vers la vidéo](#)

Center for Digital Education. Plus de matériel de soutien pédagogique ici :

<https://www.epfl.ch/education/educational-initiatives/cede/educational-technologies-gallery/boocs-en/>

Chapitre 12

Cinématique et dynamique du solide indéformable



...

notes

résumé

0m 0s



**12.1 Cinématique du solide indéformable**

- 12.1.1 Solide indéformable
- 12.1.2 Angles d'Euler
- 12.1.3 Angles de Tait-Bryan
- 12.1.4 Vitesse et accélération de points du solide
- 12.1.5 Roulement et glissement

**12.2 Dynamique du solide indéformable**

- 12.2.1 Théorèmes de transfert du moment cinétique
- 12.2.2 Théorèmes de transfert de moments de force
- 12.2.3 Théorèmes du moment cinétique évalué en un point

**12.3 Tenseur d'inertie et équations d'Euler**

- 12.3.1 Tenseur d'inertie
- 12.3.2 Moments d'inertie et axes principaux d'inertie
- 12.3.3 Equations d'Euler

notes

résumé

0m 1s



**12.1 Cinématique du solide indéformable**

- 12.1.1 Solide indéformable
- 12.1.2 Angles d'Euler
- 12.1.3 Angles de Tait-Bryan
- 12.1.4 Vitesse et accélération de points du solide
- 12.1.5 Roulement et glissement

**12.2 Dynamique du solide indéformable**

- 12.2.1 Théorèmes de transfert du moment cinétique
- 12.2.2 Théorèmes de transfert de moments de force
- 12.2.3 Théorèmes du moment cinétique évalué en un point

**12.3 Tenseur d'inertie et équations d'Euler**

- 12.3.1 Tenseur d'inertie
- 12.3.2 Moments d'inertie et axes principaux d'inertie
- 12.3.3 Equations d'Euler

carton autour d'un axe qui n'est pas un axe de symétrie. Là, voyez que le carton se met à voir des mouvements un peu particuliers. Ceci est compliqué à décrire. Donc on voit quelque chose d'intéressant. C'est que si on prend un objet tridimensionnel, quelconque, ce carton, par exemple, il n'est pas symétrique pour une rotation selon un axe quelconque. Ce qui est différent d'une sphère, qu'une sphère fait tourner une sphère autour d'un axe, ça reste symétrique. Ce n'est pas vrai pour le carton. Et ça, ça va avoir des conséquences très importantes. Pourquoi ? Parce qu'en fait, contrairement au point matériel, le vecteur moment cinétique ne va pas forcément être orienté de la même manière que le vecteur vitesse angulaire. D'accord ? Alors maintenant, si vous pensez à l'algèbre linéaire, vous avez un vecteur. Et vous voulez obtenir un autre vecteur qui n'est pas collinaire au vecteur de départ. Comment est-ce que vous allez vous y prendre ? Eh bien, vous allez utiliser une application linéaire qui envoie le premier vecteur sur le second. D'accord ? Alors, cette application linéaire, elle porte un nom. Ça s'appelle le Tenseur d'Inertie. D'accord ? Un Tenseur, c'est une application linéaire avec des propriétés particulières de transformation quand on passe d'un référentiel à un autre. On ne va pas discuter de la théorie des Tenseurs ici. En revanche, on va énoncer et déterminer la structure tensorielle du Tenseur d'Inertie puisque c'est un objet mathématique. D'accord ? On peut évidemment l'exprimer dans une base donnée, comme c'est une application linéaire, sous la forme d'une matrice, donc en dimension 3, une matrice carrée,  $3 \times 3$ . Vous changez de base, vous changez de matrice. Mais ce qui est intéressant, c'est qu'on a un objet derrière qu'on peut décrire sans faire référence à une base particulière. C'est comme un vecteur. Si vous prenez un vecteur dans l'espace à 3 dimensions à une flèche, vous prenez

**notes****résumé**

**12.1 Cinématique du solide indéformable**

- 12.1.1 Solide indéformable
- 12.1.2 Angles d'Euler
- 12.1.3 Angles de Tait-Bryan
- 12.1.4 Vitesse et accélération de points du solide
- 12.1.5 Roulement et glissement

**12.2 Dynamique du solide indéformable**

- 12.2.1 Théorèmes de transfert du moment cinétique
- 12.2.2 Théorèmes de transfert de moments de force
- 12.2.3 Théorèmes du moment cinétique évalué en un point

**12.3 Tenseur d'inertie et équations d'Euler**

- 12.3.1 Tenseur d'inertie
- 12.3.2 Moments d'inertie et axes principaux d'inertie
- 12.3.3 Equations d'Euler

un repère donné, une base donnée, et bien vous allez avoir des composantes pour le vecteur. En question, si vous changez de base, vous allez avoir d'autres composantes, mais ça reste le même vecteur. C'est pareil pour une application linère. Une application linère est une fonction sur un espace vectoriel qui envoie les vecteurs sur d'autres vecteurs. Peu importe la base qu'on a choisi pour les représenter. Donc pour des mathématiciens, c'est très important de comprendre ces distinctions, ces différences. Et donc contrairement à ce qui est fait dans la plupart des livres, je vais vous donner la structure tensorielle du tenseur d'inertie dans ce cours.

notes

résumé

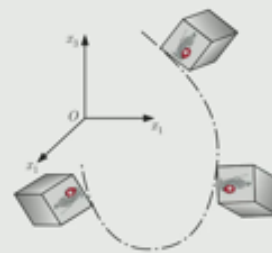
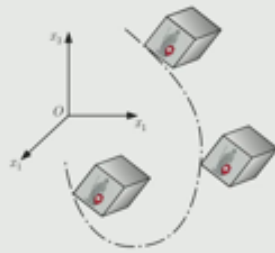
- **Solide indéformable** : système fermé constitué d'un ensemble de points matériels dont les distances relatives sont constantes. Il ne change ni de volume, ni de forme, mais uniquement d'orientation spatiale.

❶ Référentiel

❷ Cube

- ❸ **Point matériel** : mouvement de rotation du centre de masse

- ❹ **Solide indéformable** : mouvements de rotation du centre de masse et de rotation propre autour du centre de masse.



Alors, dans un premier temps, il faudra qu'on discute des bases de la cinématique, du solide indéformable, il faudra qu'on définisse ce qu'est un solide indéformable. Et puis on verra qu'on peut l'orienter dans l'espace à l'aide d'angles. Alors il y a plusieurs angles possibles. Il y a un choix qu'on va privilégier, qui sont les angles de l'air, qui est le choix le plus traditionnel. Mais si on veut décrire le mouvement d'un avion dans l'espace, si on veut jouer à des jeux de simulation d'avions comme flight simulator, eh bien ces d'autres angles qu'on va privilégier, c'est les angles dits de Tate Brian qu'on va définir, on va voir qu'ils sont reliés aux angles de l'air. Ensuite, si vous prenez un solide indéformable, comme ce carton, je donne un mouvement quelconque, il est clair pour tout le monde que si on prend différents points du carton, ils auront pas tous la même vitesse, ils auront pas tous la même accélération. Donc il y a une question légitime qu'on peut se poser, c'est comment est-ce qu'on peut lier les vitesses et les accélérations de différents points de ce carton. Alors il y a déjà une première considération intéressante, si on prend ce carton, s'il est indéformable, c'est que les distances qui séparent, ces points restent constantes au cours du temps. Je peux faire tourner le carton dans tous les sens, les distances sont fixes. En fait, ce carton se comporte comme la plateforme qu'on avait vue pour le mouvement relatif, c'est un référentiel accéléré, c'est un référentiel relatif. Donc la bonne nouvelle, c'est que le mouvement relatif, on va pouvoir le simplifier pour pouvoir traiter du solide indéformable, ça nous permet d'être plus efficace. C'est pour ça qu'on a traité dans ce cours le mouvement relatif avant le solide indéformable, parfois c'est le contraire qui est fait. La logique qu'on a utilisée sera donc plus simple pour pouvoir maintenant

## notes

## résumé

4m 34s

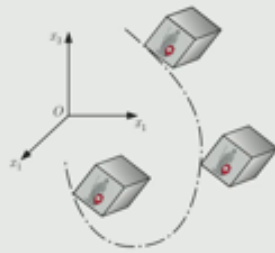


- **Solide indéformable** : système fermé constitué d'un ensemble de points matériels dont les distances relatives sont constantes. Il ne change ni de volume, ni de forme, mais uniquement d'orientation spatiale.

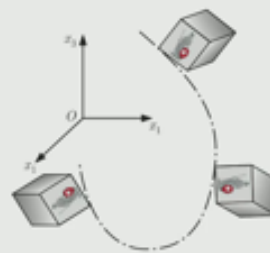
❶ Référentiel

❷ Cube

- ❸ **Point matériel** : mouvement de rotation du centre de masse



- ❹ **Solide indéformable** : mouvements de rotation du centre de masse et de rotation propre autour du centre de masse.



traiter du solide indéformable. On va également parler de roulement et de glissement. Si je prends cette bouteille d'avion, je peux la faire rouler sur la table. En même temps, je peux la faire glisser. Dans le cas général, il y a les deux effets. C'est ce qui se passe dans le cas malheureux, où il y a beaucoup de dos sur une route et que les pneus se mettent à déraiper, mais en même temps, ils tournent encore un peu. Alors si il y a un roulement avec glissement, il y a aussi un glissement sans roulement, puis évidemment un roulement sans glissement. C'est le roulement sans glissement qui va être important dans la pratique pour résoudre toutes sortes de problèmes, toutes sortes de problèmes que vous verrez en exercice, voire à l'examen. D'accord ? Ensuite, oui, les théorèmes de la dynamique du solide indéformable, on peut directement les déduire des théorèmes de la dynamique d'un système de point matériel. Pourquoi ? Parce qu'un solide indéformable, c'est un système de point matériel. Si vous prenez le solide indéformable qui est ici, au niveau moléculaire, vous avez un ensemble de molécules, à l'échelle macroscopique, on peut les considérer comme quasiment fixes, même si il peut y avoir des petits mouvements d'hybration interne. Et donc, si on prend les résultats qu'on établit en fin de semaine passée, pour les différents théorèmes qui décrivent la dynamique d'un système de point matériel, on pourra les appliquer telsquels au solide indéformable. C'est la raison pour laquelle on a fait cet exercice la semaine passée. Le théorème du centre de masse est évalué par rapport au centre de masse du solide indéformable. En revanche, le théorème du moment cinétique qu'on a introduit, lui, était évalué par rapport à l'origine. Ça, ça pose problème, puisqu'on aimerait en fait avoir une description qui se fait par rapport au même point. Donc, il faudra qu'on exprime le moment

### notes

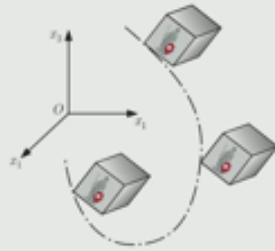
### résumé

- **Solide indéformable** : système fermé constitué d'un ensemble de points matériels dont les distances relatives sont constantes. Il ne change ni de volume, ni de forme, mais uniquement d'orientation spatiale.

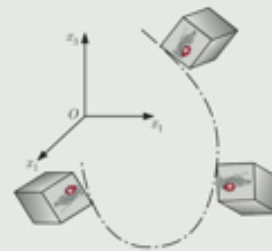
❶ Référentiel

❷ Cube

- ❸ **Point matériel** : mouvement de rotation du centre de masse



- ❹ **Solide indéformable** : mouvements de rotation du centre de masse et de rotation propre autour du centre de masse.



cinétique et les moments de force en termes d'un point quelconque du solide indéformable en partant de l'origine. Il faudra donc qu'on établisse mathématiquement un certain nombre de théorèmes de transfert. D'accord ? Et puis ensuite, on s'intéressera à la dynamique propre de rotation de notre solide indéformable décrite par rapport au centre de masse de ce solide. D'accord ? Donc, on va regarder le théorème du moment cinétique, qu'on va évaluer par rapport au centre de masse, et ainsi, le seul mouvement de rotation qu'on va décrire, c'est le mouvement de rotation propre de ce solide. Et c'est là que va apparaître le tenseur d'inertie. On va également voir que ce tenseur d'inertie, on peut toujours le diagonaliser. On va chercher une base dans laquelle la matrice qui le représente est diagonale. Et alors, les valeurs propres de cette matrice seront les moments d'inertie, et les axes donnés par les vecteurs propres, dont les vecteurs propres sont les vecteurs directeurs, sont les axes principaux d'inertie. Contrairement à un cours de maths, il ne faudra pas les chercher, il faut juste ouvrir les yeux et on va les voir. D'accord ? Ca sera plus simple. D'accord ? Ca sera plus simple pour des objets réguliers, et vous aurez des objets réguliers à l'examen. Si les objets sont plus compliqués, ça peut s'avérer plus technique. D'accord ? Donc voilà un peu le menu du jour et on terminera avec les équations de l'air, qui sont les équations de la dynamique en rotation d'un solide indéformable exprimé dans une base où le tenseur d'inertie est diagonale. D'accord ? Voilà. Alors, tout ça, il peut paraître un peu abstrait pour l'instant.

## notes

## résumé

- **Théorème d'orientation** : 6 coordonnées sont nécessaires pour orienter un solide indéformable quelconque par rapport à un référentiel donné.

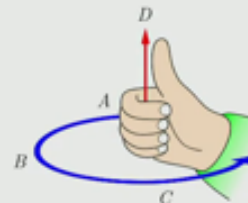
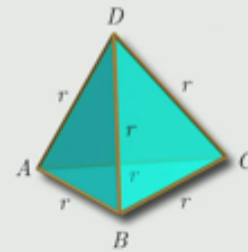
① **Position** : 3 coordonnées cartésiennes

② **Orientation** : 3 angles (Euler)

- **Démonstration** : tétraèdre régulier de sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ , et d'arête  $r$ .

• **Orientation** : main droite

$$(AB \times AC) \cdot AD > 0$$



On va rendre tout ça concrètement, progressivement, à faire en mesure que le cours se déroule. Donc... Si on écrit les rotations d'un solide indéformable par rapport à un point fixe, par exemple une origine qu'on aurait pu passer ici, on peut avoir un mouvement de rotation, d'accord ? De rotation sans changement d'orientation qu'on aurait pu décrire dans le cas du modèle du point matériel. Et avec le solide indéformable, ce qu'on peut ajouter, maintenant, c'est la rotation propre, en n'importe quelle direction. Et donc, par exemple, si je fais ça, là, je convine le mouvement de rotation propre avec le mouvement de rotation du solide indéformable autour d'un axe. D'accord ? C'est ça qu'on va décrire ensemble.

notes

résumé

9m 51s



- **Théorème d'orientation** : 6 coordonnées sont nécessaires pour orienter un solide indéformable quelconque par rapport à un référentiel donné.

① **Position** : 3 coordonnées cartésiennes

② **Orientation** : 3 angles (Euler)

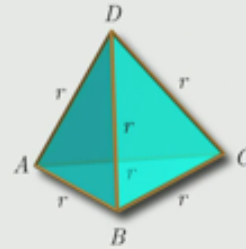
- **Démonstration** : tétraèdre régulier de sommets  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ , et d'arrête  $r$ .

① **Point A** : 3 coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$

② **Point B** : 2 angles  $(\theta, \phi)$  sur une sphère de rayon  $r$  centrée en  $A$ .

③ **Point C** : 1 angle  $\psi$  sur le cercle obtenu par intersection de deux sphères de rayon  $r$  centrées en  $A$  et  $B$ .

④ **Point D** : entièrement déterminé par l'intersection de trois sphères de rayon  $r$  centrées en  $A$ ,  $B$  et  $C$  et par l'orientation du tétraèdre (règle de la main droite).



Alors, si on prend un solide indéformable comme cette boîte en carton, d'accord ? Ce parallèle pipette, eh bien, il faut pouvoir l'orienter d'abord dans l'espace. La question qu'on peut se poser, c'est, combien est-ce qu'on a besoin de degré-dibéreté pour pouvoir orienter cet objet dans l'espace ? La réponse, ça, il faut s'y coordonner. Six degré-dibéreté. D'accord ? Pour simplifier la discussion sans perte de généralité, on va prendre comme objet un tétraèdre, d'accord ? Avec les quatre sommets que vous voyez ici, qui sont séparés par des arrêtes régulières de distance  $R$ , d'accord ? Ou de norme  $R$ . Les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , on les place dans un plan horizontal, par exemple, et ce tétraèdre, il est orienté. C'est-à-dire que si on a placé  $A$ ,  $B$ ,  $C$  dans un plan horizontal en vue d'avion dans le sens trigonométrique, eh bien, automatiquement,  $D$  va se retrouver en-dessus du plan en question. D'accord ? Cette orientation, on peut la décrire mathématiquement en disant que si on prend le produit vectoriel du vecteur  $AB$  avec le vecteur  $AC$ , donc, vous alignez l'index selon  $AB$ , le majeur selon  $AC$ , qu'est-ce que vous voyez le plus ? Il est octogonal, il pointe vers l'eau. Donc, si vous prenez le produit scalaire du tout avec le vecteur  $AD$ , donc, le vecteur obtenu par produit vectoriel de  $AB$  avec  $AC$  est orienté comme ceci, vous avez un angle aigu, donc le produit scalaire avec  $AD$  va vous donner un résultat positif. Ça, c'est essentiel pour la suite, d'accord ? Pour démontrer le théorème. Alors, on va rapidement le démontrer ensemble.

notes

résumé

10m 37s



- **Orientation** : l'orientation d'un solide indéformable autour de l'origine  $O$  peut être repérée par des angles  $(\phi, \theta, \psi)$  appelés **angles d'Euler**

➊ **Repère absolu** :  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  associé au référentiel d'inertie

➋ **Repère relatif** :  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$  associé au solide indéformable

➌ **Transformation** :  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) \xrightarrow{(\phi, \theta, \psi)} (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$



➍ **Précession** :  
Rotation d'angle  $\phi$   
autour de l'axe  
vertical  $Ox_3$  :  
 $Ox_1 \rightarrow Ou$



➎ **Nutation** :  
Rotation d'angle  $\theta$   
autour de l'axe nodal  
 $Ou$  :  
 $Ox_3 \rightarrow Oy_3$



➏ **Rotation propre** :  
Rotation d'angle  $\psi$   
autour de l'axe de  
rotation propre  $Oy_3$  :  
 $Ou \rightarrow Oy_1$

La première chose à faire, évidemment, c'est de placer un point dans l'espace, comme avec cette boîte. Vous prenez un sommet de la boîte, d'accord ? Par exemple, le sommet qui est ici, le coin qui est là, et vous l'orientez, enfin, toujours vous placez quelque part dans l'espace. Pour le placer dans l'espace, vous avez besoin de trois coordonnées, ça peut être des coordonnées cartésiennes, XYZ, ça peut être des coordonnées cylindriques ou encore des coordonnées sphériques. D'accord ? Faut trois coordonnées pour placer ce premier point. Alors, ça, c'est maintenant acquis. On a placé le premier point. Par exemple, imaginons qu'on ait placé le point A du tête-raider qui est ici. D'accord ? Une fois qu'on a placé le point A, il faut placer le point B. Qu'est-ce qu'on sait sur le point B ? On sait qu'il se trouve forcément à une distance  $R$  du point A. On va donc prendre une sphère de rayon  $R$ , centrer en A, et on sait que le point B se trouve sur cette sphère. Penser à la terre, pour localiser avec le GPS un point à la surface de la terre, il faut deux angles. L'angle nodale, le complémentaire de l'angle de l'attitude, et l'angle azimutale, qui donnerait la longitude. Donc, il faut deux angles, un angle theta et un angle phi. Alors, maintenant, on a placé A, on a placé B. Il faut qu'on place C. Qu'est-ce qu'on sait sur le point C ? Il se trouve à une distance  $R$  de A, et il se trouve à une distance  $R$  de B. Donc, on va prendre deux sphères de rayon  $R$ , centré respectivement en A et en B, et l'intersection de ces deux sphères va nous donner un cercle qui se trouve dans le plan médiateur entre A et B. Et le point C est quelque part sur ce cercle. D'accord ? Alors, combien est-ce qu'il faut de

notes

résumé

12m 15s



- **Orientation** : l'orientation d'un solide indéformable autour de l'origine  $O$  peut être repérée par des angles  $(\phi, \theta, \psi)$  appelés **angles d'Euler**

➊ **Repère absolu** :  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  associé au référentiel d'inertie

➋ **Repère relatif** :  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$  associé au solide indéformable

➌ **Transformation** :  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) \xrightarrow{(\phi, \theta, \psi)} (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$



➊ **Précession** :

Rotation d'angle  $\phi$   
autour de l'axe  
vertical  $Ox_3$  :

$Ox_1 \longrightarrow Ou$



➋ **Nutation** :

Rotation d'angle  $\theta$   
autour de l'axe nodal  
 $Ou$  :

$Ox_3 \longrightarrow Oy_3$



➌ **Rotation propre** :

Rotation d'angle  $\psi$   
autour de l'axe de  
rotation propre  $Oy_3$  :

$Ou \longrightarrow Oy_1$

degrés libertés pour déterminer un point sur un cercle ? Évidemment, un seul, c'est l'angle. D'accord ? C'est l'angle qui définit la position sur le cercle. Ok ? Donc, il y a un troisième angle qui faut introduire. Ce troisième angle, on va l'appeler l'angle C. Ok ? Alors, maintenant, on a placé A, on a placé B, on a placé C. Qu'est-ce qu'on sait sur D ? D se trouve à une distance R de A, de B et de C. Donc, on prend trois sphères, centré en A, en B et en C de rayon R. L'intersection entre ces trois sphères nous donne deux points. Un point qui se trouve... Enfin, ces deux points vont se trouver, disons, sur la droite verticale qui passe par le centre géométrique du triangle A, B, C. D'accord ? Il y a un point en-dessus et un point en-dessous. Bon, alors maintenant, comme le tétraèdre est orienté, une fois qu'on a déterminé A, B, C dans un plan horizontal orienté dans le sens trigonométrique, on sait automatiquement que le point D se trouve en-dessus. Ok ? Donc, une fois qu'on a placé A, B, C, on n'a plus de degré de liberté pour placer D. Donc, l'information de l'orientation de ce tétraèdre se cache dans le placement des points A, B, C, soit dans les trois coordonnées pour placer A et les trois angles pour placer successivement B, C. Il faut donc six grandeurs pour orienter et placer un solide indéformable dans l'espace à trois dimensions. D'accord ? Alors, maintenant, ce qui va nous intéresser, plus que le placement, c'est l'orientation. Prenons un point de notre solide et orientons le solide indéformable autour de ce point. C'est comme si on avait déjà placé le point A, on pourrait prendre un autre point, et on oriente le solide par rapport à ce point-là. Eh bien, on aura besoin des trois angles dont on

notes

résumé

- **Orientation** : l'orientation d'un solide indéformable autour de l'origine  $O$  peut être repérée par des angles  $(\phi, \theta, \psi)$  appelés **angles d'Euler**

① **Repère absolu** :  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  associé au référentiel d'inertie

② **Repère relatif** :  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$  associé au solide indéformable

③ **Transformation** :  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3) \xrightarrow{(\phi, \theta, \psi)} (\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$



① **Précession** :  
Rotation d'angle  $\phi$   
autour de l'axe  
vertical  $Ox_3$  :  
 $Ox_1 \longrightarrow Ou$



② **Nutation** :  
Rotation d'angle  $\theta$   
autour de l'axe nodal  
 $Ou$  :  
 $Ox_3 \longrightarrow Oy_3$



③ **Rotation propre** :  
Rotation d'angle  $\psi$   
autour de l'axe de  
rotation propre  $Oy_3$  :  
 $Ou \longrightarrow Oy_1$

vient de parler. Ces trois angles, c'est par exemple les angles de l'air. D'accord ? Alors, pour comprendre les angles de l'air et leur structure, il faut se dire que notre solide indéformable, c'est un référentiel. D'abord, on le place de manière fixe dans le référentiel absolu, le référentiel d'inertie. D'accord ? Puis ensuite, ce solide indéformable, on peut l'orienter comme on veut. Donc, on peut le faire tourner dans les trois directions de l'espace pour lui donner une orientation quelconque. D'accord ? Donc, ce qu'on veut pouvoir faire, c'est orienter le référentiel relatif du solide indéformable par rapport au référentiel absolu du sol. D'accord ? C'est ça l'idée. Et donc, on va prendre des repères.

notes

résumé

- **Mouvements de rotation** : une vitesse angulaire est associée à chaque mouvement de rotation.

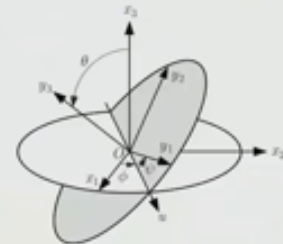
➊ **Précession** : autour de l'axe vertical  $Ox_3$

➋ **Nutation** : autour de l'axe nodal  $Ou$

➌ **Rotation propre** : autour de l'axe de rotation propre  $Oy_3$

- **Vitesse angulaire** : solide indéformable

**Leonhard Euler**  
1707 – 1783



(12.1)

On va prendre un repère cartésien absolu avec trois vecteurs unitaires,  $X_1$  chapeau,  $X_2$  chapeau,  $X_3$  chapeau. Et on va prendre un repère relatif qui est fixe par rapport au solide indéformable,  $Y_1$  chapeau,  $Y_2$  chapeau et  $Y_3$  chapeau. La question qu'on pose est la suivante. Comment passer des vecteurs unitaires du premier repère au vecteur unitaire du deuxième repère ? D'accord ? Pour ce faire, il faudra faire trois rotations. Trois rotations qui vont faire intervenir nos trois angles qui permettent d'orienter le solide indéformable. Ces trois angles qui seront les angles de l'air, l'angle phi, l'angle theta et l'angle psi. Ok ? Alors, la première chose à faire, c'est de faire une rotation dans le plan horizontal. D'accord ? Donc, on prend notre repère absolu avec les axes cartésiens qui lui sont associés. On prend l'axe  $OX_1$  et on fait une rotation dans le plan horizontal d'un angle phi. On amène cet axe  $OX_1$  sur ce qu'on appelle l'axe nodale, qui est l'axe  $OU$ . D'accord ? Cette rotation s'appelle une précession. Elle se fait, évidemment, autour de l'axe vertical absolu qui est ici, qui est l'axe  $OX_3$ . D'accord ? Alors, on peut faire une rotation d'un angle quelconque, entre 0 et  $\pi/2$ . D'accord ? Non, entre 0 et... Autant pour moi. Entre 0 et  $2\pi$ . D'accord ? Bon, alors, on a fait cette rotation maintenant. On aimerait en faire une deuxième dans un plan vertical. Alors, si on l'a fait dans un plan vertical, on l'a fait autour de quel axe horizontal ? Eh bien, justement, du nouvel axe qu'on vient d'introduire en ayant fait la rotation de l'axe  $OX_1$  en l'amenant sur l'axe nodale. Donc, on a maintenant une rotation qui va se faire autour de l'axe nodale, l'axe  $OU$ . Cette rotation, si vous prenez un disque que vous dessinez sur le carton, d'accord ? Cette rotation va incliner le disque. D'accord ? Donc,

notes

résumé

16m 37s



- **Mouvements de rotation** : une vitesse angulaire est associée à chaque mouvement de rotation.

➊ **Précession** : autour de l'axe vertical  $Ox_3$

**Leonhard Euler**  
1707 – 1783

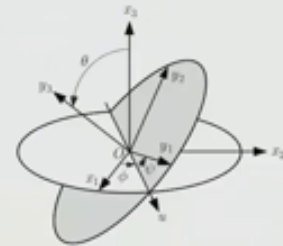


➋ **Nutation** : autour de l'axe nodal  $Ou$

➌ **Rotation propre** : autour de l'axe de rotation propre  $Oy_3$

- **Vitesse angulaire** : solide indéformable

(12.1)



initialement, il était ici horizontal en blanc, il est ensuite en gris. Donc, on a fait cette rotation autour de l'axe nodale, l'axe  $OU$  qui est dans un plan horizontal, et qui va amener l'axe vertical absolu  $OX_3$  sur l'axe relatif  $OY_3$ , qui sera l'axe de rotation propre. D'accord ? Ça, c'est la deuxième rotation. Cette rotation se fait à l'aide de l'angle nodale  $\theta$ , qui lui varie entre 0 et  $\pi$ . D'accord ? Bon. Si on avait un point dans notre solide indéformable qu'on fait tourner, on pourrait l'amener sur n'importe quel point qui se trouve à une distance constante de l'origine à l'aide de ces deux angles. On a un solide indéformable. Donc, il y a un degré d'hibérité supplémentaire qui consiste à faire tourner le solide indéformable sur lui-même. Alors, une fois qu'on a incliné notre... Je vais le faire que je laisse la même orientation que chez vous. Donc, une fois qu'on a incliné notre solide indéformable, on peut encore le faire tourner dans le plan en noir ici, autour de l'axe de rotation propre, qui est l'axe  $OY_3$ . D'accord ? Et la rotation va se faire d'un angle de rotation propre,  $\psi$ , OK ? Qui va amener l'axe nodale  $OU$  sur l'axe  $OY_1$  et l'axe qui est orthogonal à  $OU$ , qui est  $OV$ , qui lui est amené sur l'axe  $OY_2$ . Et ainsi, on a complètement défini, à l'aide de ces trois rotations, d'accord ? L'orientation du repère relatif avec les vecteurs unitaires  $Y_1$  chapeau,  $Y_2$  chapeau,  $Y_3$  chapeau. D'accord ? Par rapport au point de départ, par rapport au repère absolu, ce qu'il donnait par les vecteurs  $X_1$  chapeau,  $X_2$  chapeau et  $X_3$  chapeau. D'accord ? Donc voilà l'objectif. C'est un peu compliqué, parce que, vous voyez que ces trois axes de rotation, d'accord, se font par rapport à des systèmes de coordonnées différents. Tout d'abord, on a un axe  $OX_3$ , qui est l'axe absolu

notes

résumé

- **Mouvements de rotation** : une vitesse angulaire est associée à chaque mouvement de rotation.

➊ **Précession** : autour de l'axe vertical  $Ox_3$

**Leonhard Euler**  
1707 – 1783

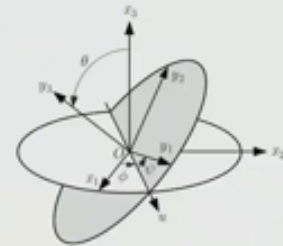


➋ **Nutation** : autour de l'axe nodal  $Ou$

➌ **Rotation propre** : autour de l'axe de rotation propre  $Oy_3$

- **Vitesse angulaire** : solide indéformable

(12.1)



de départ. Ensuite, on a l'axe  $OU$ , qu'on a introduit grâce à la rotation. Puis finalement, on a une rotation pour la rotation propre, qui va se faire autour de  $OY_3$ . Vous avez une question ? Je voulais que vous puissiez placer la boîte en carton, avant de placer la rotation. Pardon ? Comment on le placer initialement ? Alors, vous le placer comme vous voulez, en fait. Le plus simple, c'est de prendre la boîte en carton pour réfléchir sur ce qu'on est en train de faire. C'est de prendre la boîte en carton, et placer par exemple le plan horizontal, le disque que vous voyez ici dans le plan horizontal. Et donc la première rotation, c'est de faire tourner le carton d'un angle quelconque, un angle  $\psi$  entre 0 et  $2\pi$ . D'accord ? Puis ensuite, vous allez l'incliner comme ceci. D'accord ? D'un angle  $\theta$ . L'angle  $\theta$  peut varier entre 0 et  $\pi$ . Puis ensuite, à la rotation propre, qui revient à le faire tourner dans son propre plan. D'accord ? Là aussi, d'un angle qui varie entre 0 et  $2\pi$ . Donc grâce à ces trois angles, vous pouvez partir de ce carton et vous donner absolument n'importe quelle orientation dans l'espace. D'accord ? C'est un sac serve ses angles de l'air. Oui ? Quand vous dites que vous pouvez faire varier le  $\psi$  et l'autre 0 et  $\pi$ , ça veut dire qu'il est symétrique ? Alors si vous voulez, j'ai volontairement ici pris une écriture qui est différente de ce qui est fait. Habituellement, ce n'est pas l'écriture de mon collègue en serment dans l'huile de mécanique. Pourquoi ? Parce qu'en fait, les deux premières rotations, on pourrait les faire pour un point. D'accord ? D'ailleurs, on les a déjà faites, encore donner sphérique. Alors encore, en sphérique, volontairement, on avait choisi un angle, si vous vous rappelez, l'angle azimutale, il variait entre 0 et

notes

résumé

- **Mouvements de rotation** : une vitesse angulaire est associée à chaque mouvement de rotation.

➊ **Précession** : autour de l'axe vertical  $Ox_3$

**Leonhard Euler**

1707 – 1783

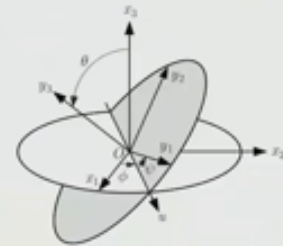


➋ **Nutation** : autour de l'axe nodal  $Ou$

➌ **Rotation propre** : autour de l'axe de rotation propre  $Oy_3$

- **Vitesse angulaire** : solide indéformable

(12.1)



2 pi. L'angle nodale, lui, il variait entre 0 et pi. Pourquoi ? Parce que si vous faites varier les deux angles entre 0 et 2 pi, eh bien, il y a des configurations qui apparaissent deux fois. D'accord ? Donc ça, c'est un choix de paramétrisation, à la base. Donc on reprend ce même choix. Les deux premiers angles, si je prends un point sur mon solide indéformable, mes deux premiers angles me permettent d'envoyer le point n'importe où sur une sphère autour du point fixe de départ. D'accord ? C'est un angle de latitude et un angle de longitude. Ce que le troisième angle permet de faire, c'est la rotation propre du solide indéformable sur lui-même, ce qui est impossible pour un point matériel. Et là, on voit bien la structure. On a l'angle azimutale-fi, on a l'angle nodale-tetta, et on a l'angle propre-psi qui vient s'ajouter à la description. D'accord ? Je vais vous illustrer ça dans quelques instants avec plusieurs exemples et une animation sur Unity. D'accord ? Est-ce qu'il y a encore d'autres questions ? Oui ? Le coeur-u est le coeur-u. Alors, le... Disons, cet axe nodal, il va dépendre de l'orientation qu'on veut de l'is au solide indéformable. D'accord ? Donc on va choisir, à un moment donné, de faire une rotation dans un plan vertical et forcément que cette rotation va se faire autour d'un axe horizontal. Et alors là, dans la construction, on voit que on peut facilement obtenir cet axe en faisant une première rotation qui amène l'axe de départ, qui est  $OX_1$ , sur cet axe  $OU$ . D'accord ? Alors, tout à l'heure, vous verrez une animation avec une... Déjà, vous la verrez avec le gyroscope qui est ici, puis ensuite avec une toupie sur l'application Unity. Et vous verrez que l'axe nodale, cet axe  $OU$ , va changer au cours du temps à fur et à mesure que la toupie

notes

résumé

- **Mouvements de rotation** : une vitesse angulaire est associée à chaque mouvement de rotation.

➊ **Précession** : autour de l'axe vertical  $Ox_3$

**Leonhard Euler**  
1707 – 1783

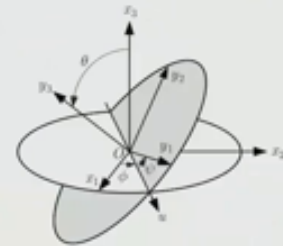


➋ **Nutation** : autour de l'axe nodal  $Ou$

➌ **Rotation propre** : autour de l'axe de rotation propre  $Oy_3$

- **Vitesse angulaire** : solide indéformable

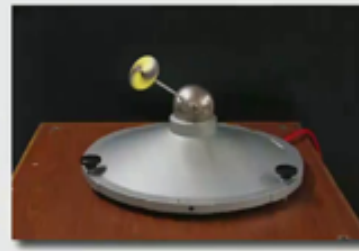
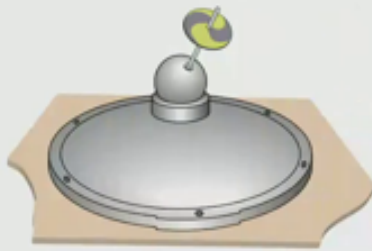
(12.1)



va tourner au tour de l'axe vertical qu'elle va précéder. D'accord ? Donc le mouvement de rotation au tour de l'axe vertical, au départ, s'appelle la précession. Donc on va appeler l'angle azimutale, maintenant, l'angle de précession. La rotation qui se fait dans le plan vertical, c'est la nutation, comme on l'avait décrit pour le point matériel, on a l'angle associé qui est Theta, et puis finalement, on a la troisième rotation, qui est la rotation propre, d'accord ? Avec un angle psi, dans le plan en gris qui apparaît ici, autour de l'axe  $OY_3$ . Qui dit rotation ? Dis vitesse angulaire liée à la rotation. Alors justement, comme il y a trois rotations qui apparaissent, il y aura trois vitesses angulaires. Ok ?

notes

résumé



- ❶ La **précession** de vitesse angulaire  $\dot{\phi}$  est le mouvement de rotation de l'axe du gyroscop autour de l'axe de symétrie vertical.
- ❷ La **nutation** de vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  est le mouvement de rotation de l'axe du gyroscop dans un plan vertical radial.
- ❸ La **rotation propre** de vitesse angulaire  $\dot{\psi}$  est le mouvement de rotation du disque de couleur autour de l'axe du gyroscop.

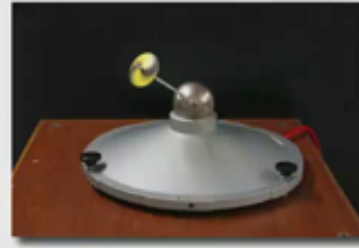
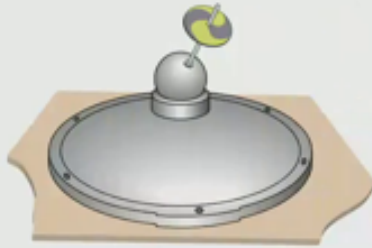
La première, c'est la vitesse angulaire de précession pour une rotation autour de l'axe vertical. L'angle qui va varier, c'est l'angle dans le plan horizontal, qui est l'angle de précession, l'angle azimutale,  $\phi$ . Donc on aura la vitesse angulaire. Attendez, je crois que je vais juste changer ici de grosseur de trait, voilà. Donc on a la vitesse angulaire. Non mais je ne le ferais pas la noter avec une barre. On a la vitesse angulaire  $\phi$ . Qui est la vitesse angulaire scalaire  $\phi$ . Il y a la variation de l'angle  $\phi$  dans le plan horizontal. Et cette rotation se fait autour de l'axe vertical, qui a pour vecteur unitaire  $\mathbf{X}_3$  chapeau. D'accord ? Ensuite, on a la nutation. La nutation est décrite par le vecteur vitesse angulaire de nutation tête à point, qui l'a dérivé temporelle de l'angle de nutation dans le plan vertical. L'angle qui est ici. Faut à quoi, le vecteur unitaire, selon l'axe horizontal, orthogonal à ce plan vertical, qui est l'axe nodale, on aura donc un vecteur unitaire, selon  $\mathbf{OU}$ . Ce vecteur unitaire, c'est le vecteur  $\mathbf{U}$ -chapo. D'accord ? Et puis on termine avec une troisième rotation, qui est la rotation propre, qui se fait dans le plan incliné ici, en gris. C'est l'angle de rotation propre,  $\psi$ , qui varie. Donc la vitesse angulaire de rotation propre,  $\psi$ -point, c'est la dérivé temporelle de cet angle. Faut à le vecteur unitaire, qui est orthogonal au plan gris, évidemment, dans le sens donné par la règle de la main droite, qui va correspondre au vecteur unitaire orienté, selon l'axe  $\mathbf{OY}_3$ . C'est donc  $\mathbf{Y}_3$  chapeau. D'accord ? C'est ça qui est un peu déroutant. Ces vitesses angulaires sont définies par rapport à des repères différents. Oui ? Le bain-gâts  $\mathbf{Y}_3$  chapeau ne change pas dans la rotation ? Alors, si, si, si. Alors, alors, alors, on peut ensuite le redériver. Donc si, par exemple, c'est une très bonne

notes

résumé

24m 53s



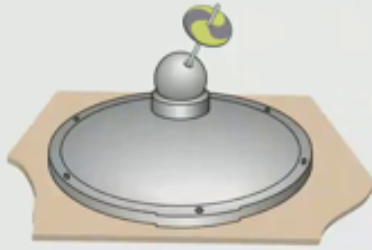


- ❶ La **précession** de vitesse angulaire  $\dot{\phi}$  est le mouvement de rotation de l'axe du gyroscope autour de l'axe de symétrie vertical.
- ❷ La **nutaton** de vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  est le mouvement de rotation de l'axe du gyroscope dans un plan vertical radial.
- ❸ La **rotation propre** de vitesse angulaire  $\dot{\psi}$  est le mouvement de rotation du disque de couleur autour de l'axe du gyroscope.

question, vous posez Martin, prenez le vecteur vitesses angulaires de rotation propre, psi-point, par exemple, imaginons que vous vouliez l'accélération. A ce moment-là, vous allez dériver par rapport au temps psi-point. Vous allez dériver la vitesse angulaire scalaire, mais vous allez dériver aussi le vecteur unitaire. Et pour ce faire, vous allez devoir vous servir des formules de poissons. On parlera de ça plus tard. D'accord ? Alors, le vecteur vitesses angulaire total de rotation propre, de notre solide indéformable, va être la somme des vecteurs vitesses angulaires de rotation, dû aux trois rotations qui apparaissent d'écrits en termes des angles de l'air. Donc, il y a la vitesse angulaire de précision, il y a la vitesse angulaire de nutation, et il y a la vitesse angulaire de rotation propre. D'accord ? Donc c'est psi-point x3 chapeau plus theta-point u-chapeau plus psi-point y3 chapeau. Alors, pour ceux d'entre vous qui aiment beaucoup les maths, et je sais qu'il y en a beaucoup dans cette salle, il y a quand même quelque chose qui devrait vous surprendre. Lorsque vous avez décrit en algébriques les rotations, est-ce que vous avez vu les matrices de rotation ? Un exemple de matrices de rotation ? Non ? OK. Bon, pour les faire un exercice, vous allez regarder la structure des matrices de rotation. Vous pouvez déjà les trouver simplement en regardant ce que fait une matrice sur des vecteurs de base dans un repère, enfin, dans un repère ordre normé. D'accord ? Vous le dessinez sur un cercle trigonométrique et vous verrez comment vous pouvez construire une matrice de rotation sur les colonnes de votre matrice, les images des vecteurs de base. D'accord ? Alors ce que vous allez voir, c'est des cosinus, des sinus, et un 1 qui va traîner quelque part. Bon, alors si maintenant vous prenez des rotations selon des directions orthogonales, d'accord ? Et que vous faites le produit matriciel

notes

résumé

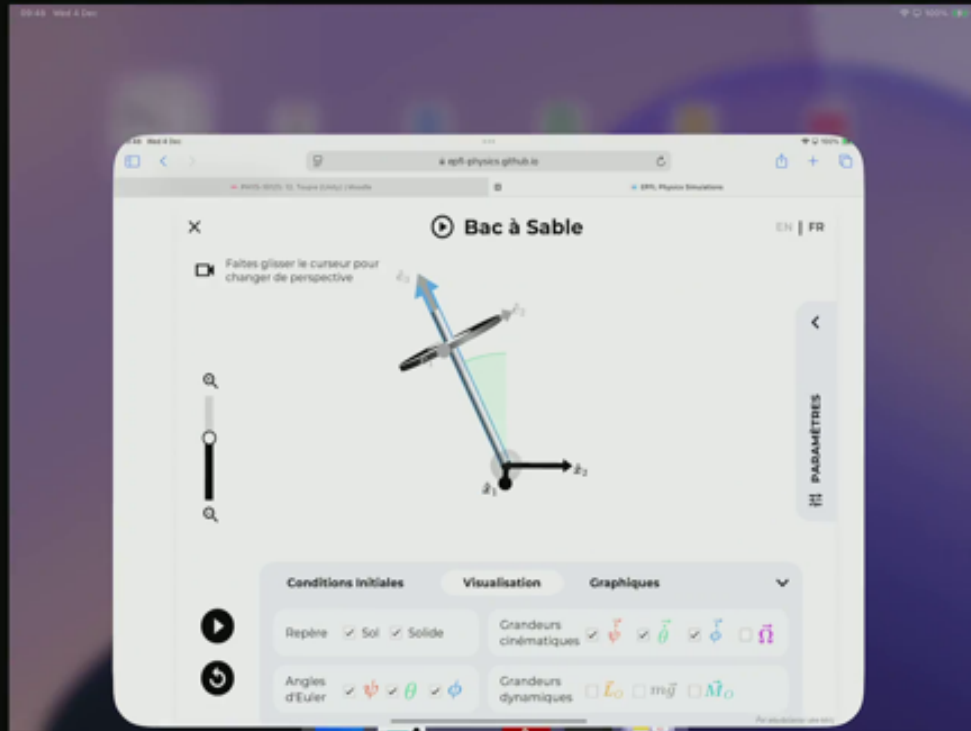


- ❶ La **précession** de vitesse angulaire  $\dot{\phi}$  est le mouvement de rotation de l'axe du gyroscope autour de l'axe de symétrie vertical.
- ❷ La **nutation** de vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  est le mouvement de rotation de l'axe du gyroscope dans un plan vertical radial.
- ❸ La **rotation propre** de vitesse angulaire  $\dot{\psi}$  est le mouvement de rotation du disque de couleur autour de l'axe du gyroscope.

d'une matrice de rotation avec une autre matrice de rotation, vous allez voir que ces matrices ne commutent pas. D'accord ? Alors si ça ne commute pas, pourquoi est-ce qu'on a le droit d'additionner ces vecteurs vitesses angulaires ? Et là, il y a une subtilité très intéressante. C'est qu'en fait, quand on calcule une vitesses angulaires, qu'est-ce qu'on fait ? On prend la dérivé d'un angle par rapport au temps. Et donc on prend le rapport d'une variation infinitésimale de l'angle sur un intervalle de temps infinitésimale. En d'autres termes, quand on décrit une vitesses angulaires, ce qui nous intéresse, ce n'est pas la rotation. C'est la rotation infinitésimale. Alors maintenant, si vous prenez des matrices de rotation et que vous regardez ce qui se passe en faisant un développement limité au premier ordre dans la limite infinitésimale, vous allez voir que les sinus des angles se réduisent aux angles, que les cosinus se réduisent à 1. Et si vous regardez juste les générateurs de ces rotations, il faut enlever la matrice d'identité et vous allez alors voir que ces rotations infinitésimales commutent. Ce n'est pas le cas des rotations, mais c'est le cas des rotations infinitésimales, puisque avec les rotations, vous avez des éléments d'un groupe et quand vous prenez les rotations infinitésimales, vous avez des éléments de l'algèbre et là, ça commute. Heureusement d'ailleurs. Sinon, la mécanique quantique serait beaucoup plus compliquée. Bon, on parlera de ça plus tard.

notes

résumé



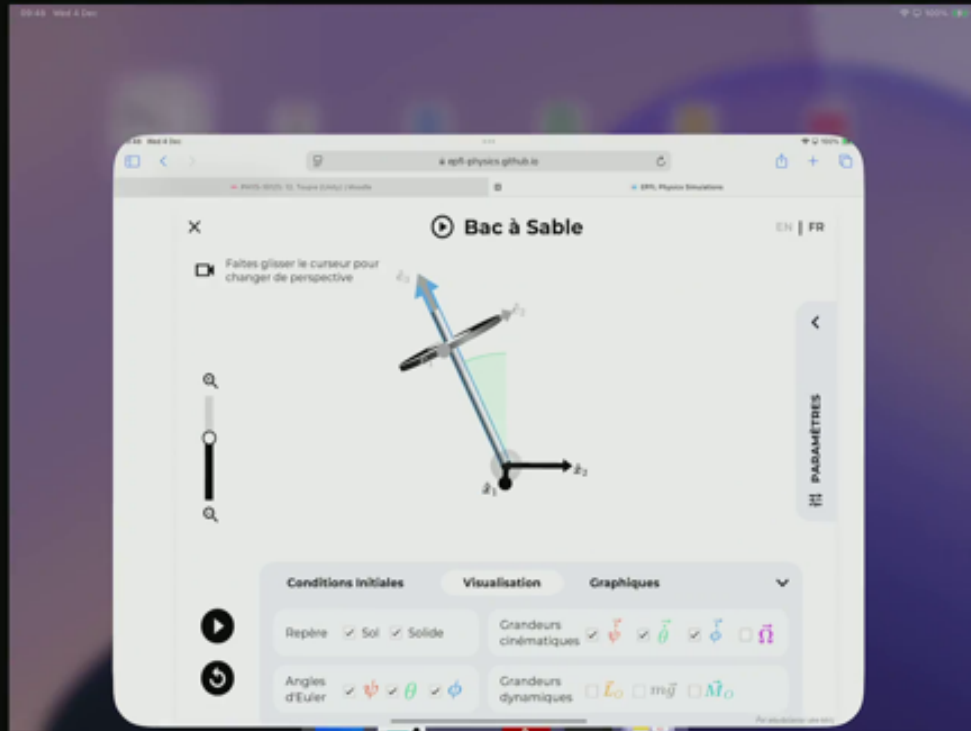
Donc maintenant, voyons un peu concrètement ce que ça signifie. C'est quoi ces angles ? Comment est-ce qu'on peut les voir dans la pratique ? Eh bien, on peut le faire grâce à un gyroscope avec une sphère sur coussin d'air qui se trouve là, sur la caméra 27. Voilà. Donc je vais injecter de l'air dans le système. Alors, pour comprendre la logique qui est derrière, imaginez que si vous voulez décrire ce qui se passe pour un point matériel, vous prenez l'extrémité de la tige qui est là. Ce qui va distinguer le point matériel du solide indéformable, c'est le volant qui est ici qui aura un mouvement de rotation propre. D'accord ? Donc vous avez d'abord la précession de cette tige avec le volant autour de l'axe vertical. D'accord ? En projection sur le plan horizontal, vous avez un angle, l'angle  $\phi$  qui varie au cours du temps. La vitesse angulaire est évidemment orientée comme ceci pour une rotation dans le sens... dans le sens trigonométrique. D'accord ? Ça, c'est le premier type d'un mouvement. Il y en a un autre. C'est ça. Ça, c'est la nutation. D'accord ? Donc, si vous montez ou vous descendez, le vecteur sera horizontalement, orthogonal au plan qui est ici, soit orienté en petit dans ce sens, soit dans celui-ci. D'accord ? Ça, c'est la nutation. Bon, alors, avec une nutation et une précession, vous placez ce point n'importe où sur une sphère à distance donnée de l'origine qui est ici. Alors, comme on n'a pas un point matériel, mais un solide indéformable, il y a un degré de liberté supplémentaire. C'est lequel ? C'est le volant qui tourne. Ça, c'est quelque chose qu'on ne voit pas si on regarde le point. D'accord ? En revanche, on a ici un motif. Quand on tourne comme ceci, vous voyez le motif tourné. D'accord ? Alors, maintenant, on peut tout combiner. Et c'est

## notes

## résumé

30m 17s

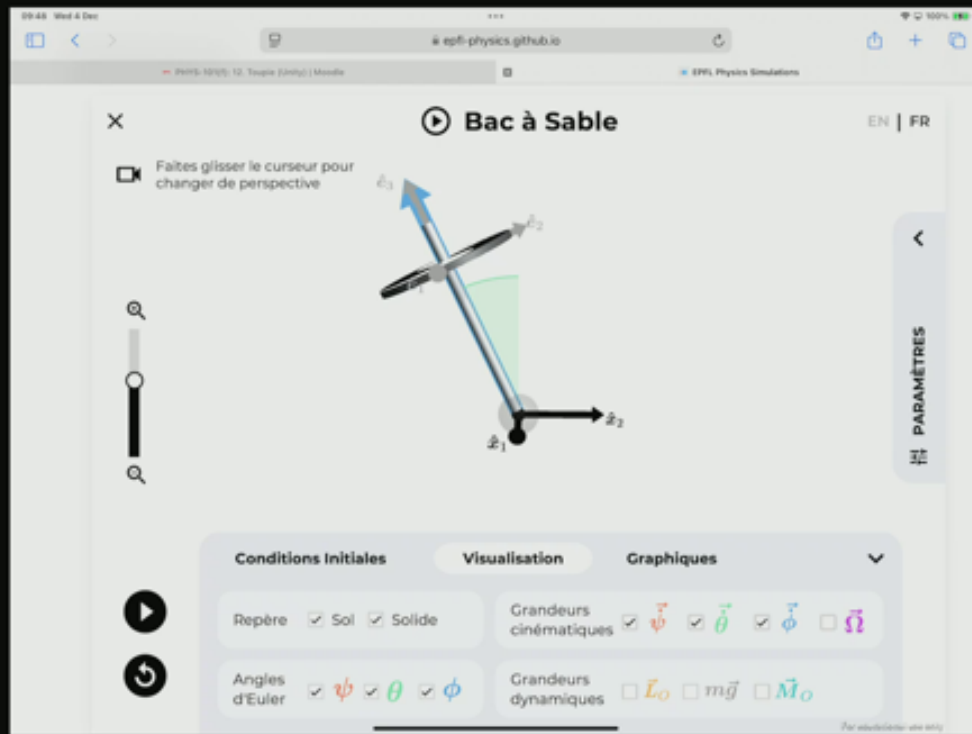




ce qu'on va faire. Vous voyez ? Vous avez la précession, une petite nutation, couplée à une rotation propre. D'accord ? Les trois degrés de liberté interviennent. Les trois degrés de liberté sont importants. D'accord ? Alors, pour les voir autrement, je vous inviterai d'ailleurs à le faire par vous-même. Voilà. On peut aller sur l'app dans Unity. Hop.

notes

résumé



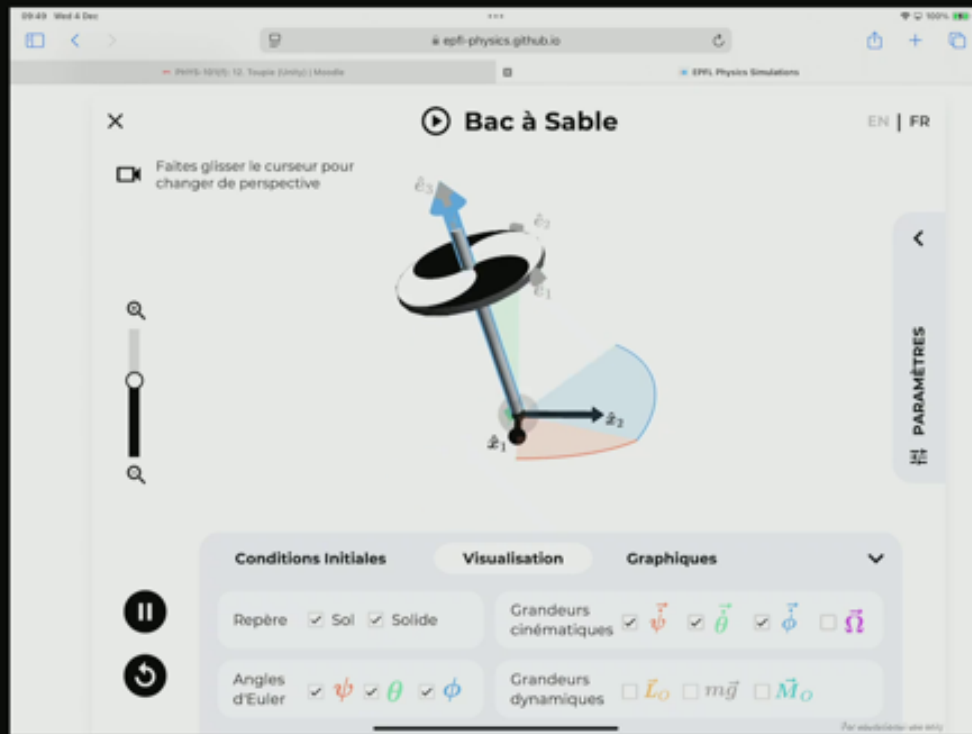
C'est toujours la même histoire. Vous allez sur le site model, vous tapez, je crois que c'est sous toupis. Et si vous allez dans le bac à sable, d'accord ? Là, on peut visualiser un peu les choses. On a volontairement introduit le repère lié au sol. On a un repère lié au sol, il n'est pas déformable. Il y a une technicalité, c'est un repère particulier, ce n'est pas un repère général, c'est en fait un repère d'inertie. Mais pour l'instant, on peut le considérer comme le repère y1 chapeau, y2 chapeau, y3 chapeau, les Y ont été remplacés par des E. D'accord ? Alors, on va mettre en rotation notre toupis.

notes

résumé

32m 41s





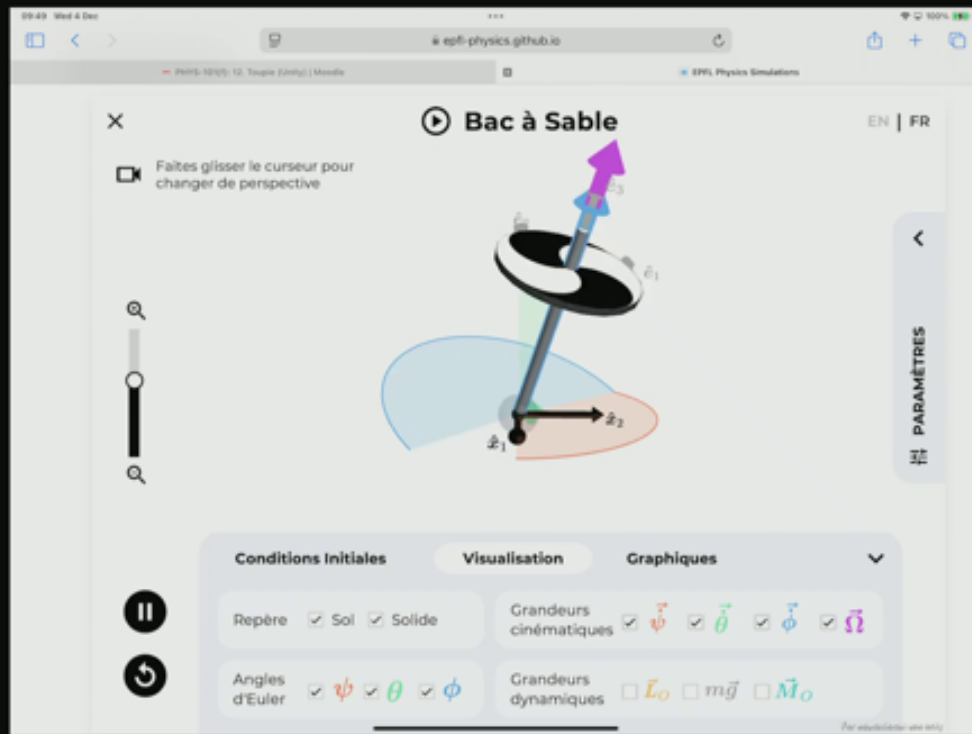
D'accord ? Vous allez voir un vecteur vertical qui apparaît en rouge. Il y a juste un changement de notation. Le psi est notre phi, et le phi est notre psi. D'accord ? Faut juste décroiser. C'est tout. D'accord ? Mais vous avez la précession qui sera décrite, l'angle phi dans le plan horizontal avec le vecteur qui est vertical. La nutation, ça sera l'angle qui apparaît en vert avec la vitesse angulaire de nutation qui sera le vecteur orthogonal à ce plan en vert. D'accord ? Et puis, à la rotation propre qui se fait selon l'axe de la tige, avec le vecteur qui apparaît en bleu. D'accord ?

notes

résumé

33m 13s





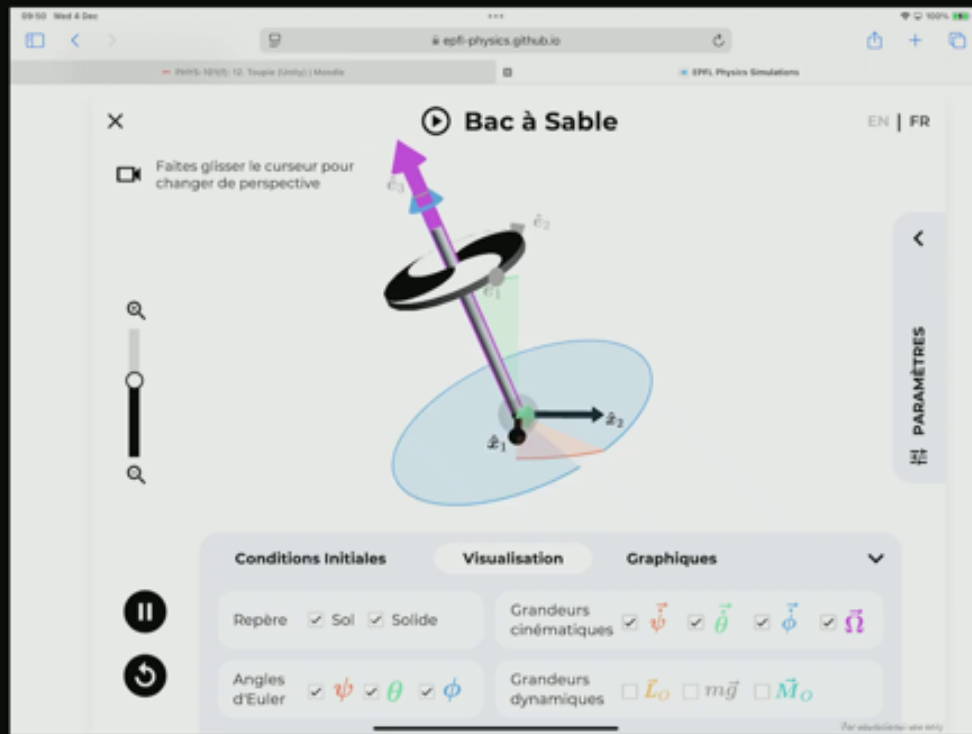
Donc, vous voyez ici les trois angles. Donc, la précession est assez lente. Vous voyez ? Ça se fait gentiment. La nutation est assez lente aussi. En revanche, la rotation propre est très élevée. Et c'est ce qui se passe en général dans la pratique. On a souvent des vitesses angulaires de rotation qui sont grandes. Ce qui veut dire que si numériquement, on prend la somme vectorielle, les trois vecteurs, les deux premiers, les vecteurs vitesses angulaires de précession en rouge et de nutation en vert sont en normes beaucoup plus petits, c'est pas à l'échelle, que le vecteur vitesses angulaires de rotation propre. Ce qui veut dire que si on prend la somme vectorielle des trois, on va avoir un vecteur qui est quasiment confondu avec le vecteur vitesses angulaires de rotation propre.

notes

résumé

33m 53s





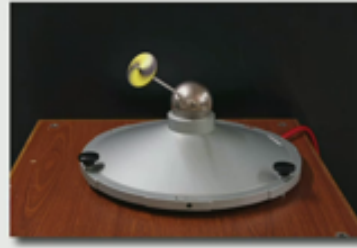
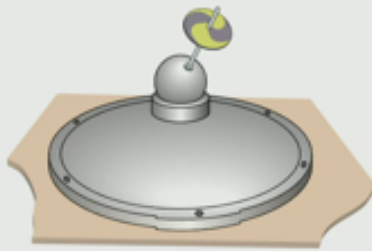
C'est le cas ici. D'accord ? Il apparaît en violet. OK ? Et c'est ce vecteur-là qui est clé dans la description de rotation d'un solide indéformable. OK ?

notes

résumé

34m 33s





- ❶ La **précession** de vitesse angulaire  $\dot{\phi}$  est le mouvement de rotation de l'axe du gyroscopie autour de l'axe de symétrie vertical.
- ❷ La **nutation** de vitesse angulaire  $\dot{\theta}$  est le mouvement de rotation de l'axe du gyroscopie dans un plan vertical radial.
- ❸ La **rotation propre** de vitesse angulaire  $\dot{\psi}$  est le mouvement de rotation du disque de couleur autour de l'axe du gyroscopie.

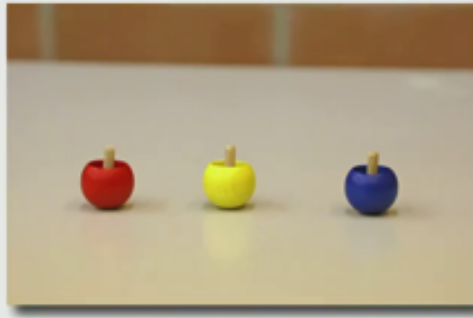
Alors, si vous trouvez que ça va trop vite, il y a encore une possibilité, c'est d'appuyer ici sur le ralenti où les choses se font plus progressivement pour voir mieux ce qui se passe. D'accord ? Voilà. Bon, revenons au cours.

notes

résumé

34m 42s





- On lance la toupie chinoise en lui donnant un mouvement de rotation propre. Le moment de force dû à son poids lui confère un mouvement de précession.
- Ce qui distingue la toupie chinoise d'une autre toupie est sa forme géométrique particulière qui donne lieu à un couplage important des mouvements de rotation propre et de précession avec la nutation.
- Ce couplage a pour effet que la toupie se retourne sur sa pointe.

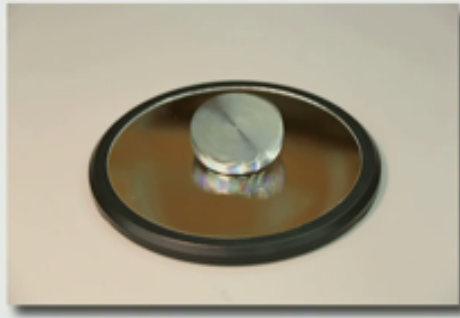
On peut aussi coupler ces trois mouvements

notes

résumé

34m 58s





- On lance le disque d'Euler en le faisant tourner dans un plan vertical. Le moment de force dû à son poids lui confère un mouvement de précession.
- La précession du point de contact du disque d'Euler lui donne ce bruit caractéristique.
- La nutation qui amène progressivement le plan du disque à l'horizontale, accroît la vitesse angulaire de rotation du point de contact, qui diverge lorsque le disque s'arrête..

de rotation du solide indéformable avec une superbe toupie, une toupie dit toupie chinoise, qui a une particularité, c'est que sa géométrie est-elle, qui a un couplage important entre ces trois mouvements de rotation. On va la lancer en faisant tourner la tige. Donc, on aura un mouvement de rotation propre, comme dans le cas du volant que vous avez vu. Et très rapidement, ce mouvement de rotation propre, dû au frottement de toutes les instabilités qu'il y aura, va se coupler avec un mouvement de nutation. Et donc, on va voir la tige se retourner sur elle-même. La toupie va alors se mettre à tourner sur la tige. Elle va tenir sur sa tige. Elle va tourner avec un mouvement, qui serait un mouvement pur, de rotation propre. Et celui-ci va devenir instable. Et vous allez voir la tige qui va se mettre à faire ceci, qui aura donc un mouvement de précession autour de l'axe vertical. Alors, voyons ceci maintenant. On prend cette toupie. C'est souvent assez délicat à lancer parce qu'il faut lui donner suffisamment de vitesse angulaire pour qu'elle fait son intéressant. Il ne faut pas qu'elle jicle. Ça, c'est ce qu'il ne faut pas faire. Je le fais. Je lance la toupie. Ce n'est pas facile à réussir. Vous voyez, il y a la nutation progressive qui se fait. Elle est maintenant sur sa pointe. Elle se met à tourner sur sa pointe. C'est instable. Et ça termine par une précession. D'accord ? Pour jouer avec ça, du rang, pour jouer avec ça, du rang, la pause.

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

résumé

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

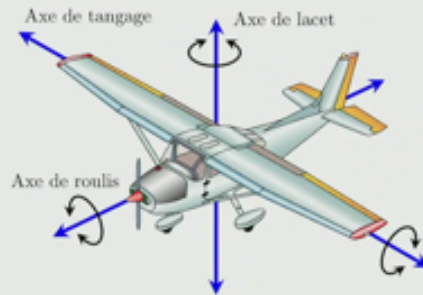
.....

35m 2s



- **Angles de Tait-Bryan** : ces angles sont une variante des angles d'Euler adaptée pour l'aéronautique.

- ① **Lacet** : analogue de la précession
- ② **Tangage** : analogue de la nutation
- ③ **Roulis** : analogue de la rotation propre



**Peter Tait**  
1831 – 1901



**George Bryan**  
1864 – 1929



C'est d'ailleurs assez sympa à faire. Bon, alors maintenant, on va faire une expérience que vous pouvez tous faire assis à votre place. Si vous sortez votre portefeuille et que vous prenez la plus grosse pièce que vous avez dedans, je vous rassure tout de suite qu'il n'y aura pas de quête à la fin du cours. D'accord ? Vous pouvez faire la chose suivante. Vous prenez votre pièce de monnaie et vous la faites tourner sur une feuille de papier. D'accord ? Sur votre table. Vous la lancez sur la tranche comme ça. Vous la faites tourner. Et qu'est-ce qui va se passer ? La pièce de monnaie, le plan de la pièce de monnaie, va s'incliner progressivement. Vous allez donc avoir une nutation. D'accord ? Avec un petit mouvement de rotation propre, puisque si vous regardez ici le point envoyé qui tourne, on va le voir dans quelques instants. D'accord ? Et puis, il y a une précession qui se fait autour de l'axe vertical. Alors si vous le faites avec une pièce de monnaie, j'en ai entendu une tourner tout à l'heure, ça dure quelques secondes. Vous voyez ? Quelqu'un a réussi à la faire tourner plus longtemps tout à l'heure. Je ne sais pas qui l'a fait. Si vous le refaites... Bravo là au fond, là. Vous vous semblez avoir de l'expérience. Pas mal. Assez joli. On va optimiser le processus. Comment ? En prenant en fait une surface qui va minimiser le frottement, qui est ici ce miroir, d'accord ? Qui est incurvée. Ok ? Le disque a des propriétés qui fait qu'il est optimisé pour ce genre d'exercice. Donc maintenant, je vais lancer ce disque de l'air. Voyez le point qui tourne ? Ça c'est la rotation propre. Ensuite, le disque s'incline, c'est la nutation. Et le disque fait ceci. Autour de l'axe vertical, ça c'est la précession. Alors maintenant, si vous écoutez ce

notes

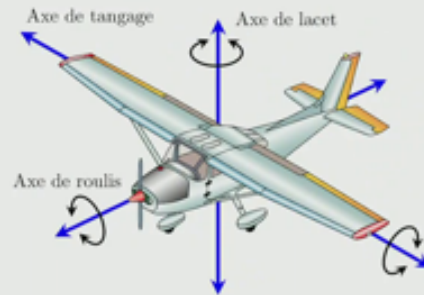
résumé

36m 39s



- **Angles de Tait-Bryan** : ces angles sont une variante des angles d'Euler adaptée pour l'aéronautique.

- ① **Lacet** : analogue de la précession
- ② **Tangage** : analogue de la nutation
- ③ **Roulis** : analogue de la rotation propre



**Peter Tait**  
1831 – 1901



**George Bryan**  
1864 – 1929



qui se passe, le bruit que vous entendez est dû au frottement entre le disque et la surface. D'accord ? Si vous écoutez bien la fréquence, vous entendez qu'elle augmente gentiment, légèrement. Ce qui veut dire que la vitesse du point de contact entre le disque et la surface va de plus en plus grande, d'accord ? Et en fait, à plus à mesure que le disque se couche, il s'incline, cette vitesse va augmenter et à la fin, il va diverger. Et ce qu'on va entendre, c'est un zut, d'accord ? C'est patient. Ça viendra progressivement. Ça reste plus en plus vite. La fréquence est plus en plus élevée. Ça prend du temps, l'éternité, c'est bon, ce qui va à la fin. Voilà, regardez. Écouter ce truc. ... D'accord ? Oui. Vous pouvez jouer avec ça durant la pause. Volontairement, j'ai mis mon micro tout prêt pour que vous sachiez bien entendre le son, parce que c'est quelque chose d'auditif pour une fois. Voilà.

notes

résumé

❶ **Référentiel absolu** : référentiel d'inertie

Repère absolu :  $(\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3)$  d'origine  $O$

❷ **Référentiel relatif** : référentiel accéléré du solide indéformable en translation et en rotation à vitesse angulaire  $\Omega$  par rapport au référentiel absolu.

Repère relatif :  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$  d'origine  $A$

- **Aucun mouvement relatif** : le point matériel  $P$  appartient au solide indéformable

(12.2)

- **Cinématique du solide indéformable** : notation allégée

(12.3)

Alors, dernier petit amusement, c'est les angles de Tay-Briand, qui sont une alternative aux angles d'olaire. Pour ceux d'entre vous qui avaient joué avec des jeux de simulation de vol, à mon époque, c'était Flight Simulator, c'est un peu vieux, évidemment, je sais, mais peut-être qu'il y a des jeux qui fonctionnent selon le même principe aujourd'hui, très certainement, d'ailleurs. D'accord ? Qui a déjà entendu parler de yo, de pitch et de roll ? Il y a quelques mains qui se lèvent. Ce sont les mots techniques qui se traduisent en français par l'asset, t'engage et rouler. D'accord ? Alors, si vous prenez un avion comme celui-ci, et que vous voulez décrire son orientation dans l'espace à trois dimensions, d'accord ? Vous allez d'abord considérer la rotation de l'avion dans un plan horizontal. Autour d'un axe vertical qui passe par le centre de l'avion, comme ceci. Quand ? Ça s'appelle un lacet. OK ? C'est évidemment l'analogue de la précession. Et puis, ce que vous pouvez faire aussi, c'est considérer le tangage. Le tangage qui va se faire autour d'un axe qui passe par les ailes de l'avion. Quand ? Donc, c'est une rotation dans un plan vertical, autour d'un axe horizontal, ça c'est le tangage. OK ? Et puis, un dernier degré d'hiberté qu'on n'a pas exploré, c'est la rotation qui se fait autour d'un axe qui passe par le fusil d'âge de l'avion. D'accord ? De l'élice, ou disons de l'avant, jusqu'à la queue. OK ? Ça, c'est le roulis, avec l'axe de roulis. Et si vous voulez combiner les trois, vous avez un joli petit mouvement qui peut expliquer ce qui se passe avec l'avion. Donc, Thomas, vous pouvez le renvoyer. C'était pas prévu, hein ? Merci, Thomas. Voilà. Alors... Il nous reste quelques minutes, on va juste commencer

notes

résumé

40m 4s



- **Vitesses** : deux points  $A$  et  $P$  du solide indéformable

$$\mathbf{v}_a(P) = \mathbf{v}_a(A) + \underbrace{\mathbf{v}_r(P)}_{=0} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P) \quad (10.24)$$

- **Cinématique du solide indéformable** : notation allégée

$$\mathbf{r}_r(P) \equiv \mathbf{AP} \quad \mathbf{v}_a(A) \equiv \mathbf{V}_A \quad \mathbf{v}_a(P) \equiv \mathbf{V}_P \quad (12.3)$$

- **Relation entre les vitesses** : points  $A$  et  $P$  du solide indéformable

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A \quad (12.4)$$

- **Relation entre les vitesses** : points  $A$  et  $Q$  du solide indéformable

$$(12.5)$$

- **Relation entre les vitesses** : points  $P$  et  $Q$  : (12.5) - (12.4)

$$(12.6)$$

- **Relation entre les vitesses** : points  $P$  et  $Q$  quelconques du solide

$$(12.7)$$

les bases de la cinématique du solide, un des formats. D'accord ? Donc, on a un référentiel absolu qui est un référentiel d'inertie avec un repère absolu fixé à l'origine haut. On prend un repère cartésien avec trois vecteurs unitaires,  $X_1$  chapeau,  $X_2$  chapeau et  $X_3$  chapeau. Le solide indéformable, la boîte galaxus, d'accord ? Ce solide indéformable, c'est notre référentiel relatif. Alors, ce référentiel relatif, il peut avoir un mouvement de translation et il peut aussi avoir un mouvement de rotation. S'il a un mouvement de translation, ça n'affecte pas les vecteurs unitaires. D'accord ? Puisqu'ils ont une longueur unité, leur orientation ne change pas, qui est une translation vers la gauche, vers la droite, vers l'avant, l'arrière, en haut et en bas. Ce qui compte, ce qui est intéressant, c'est les mouvements de rotation. Alors, on sait, et on l'a compris, que ce qui va intervenir dans la dynamique, c'est évidemment le vecteur vitesse angulaire de rotation de ce référentiel, qui est le vecteur vitesse angulaire  $\omega$ , qui décrit la rotation du solide indéformable, du référentiel relatif, par rapport au référentiel d'inertie de départ. D'accord ? Bon. Alors, au niveau de notre solide indéformable, on a donc le repère relatif, qui est fixé au solide indéformable. Par exemple, on pourrait prendre les axes naturels de notre carton, d'accord, avec 3 vecteurs unitaires le long de ces axes, partant d'un coin. D'accord ? C'est un exemple de référence, de repère relatif, ce n'est pas le seul, mais c'en est un. Ok ? Si on pense à la logique du mouvement relatif, on avait décrit le mouvement d'un drone, par rapport à un référentiel relatif, qui était la plateforme. Le mouvement relatif du drone, par rapport à la plateforme, ne nous intéresse pas. C'est le mouvement de la plateforme qui nous intéresse maintenant. C'est le référentiel relatif lui-même. Donc, on prend le drone, on le fait amérir sur la plateforme,

notes

résumé

42m 9s



- **Vitesses** : deux points  $A$  et  $P$  du solide indéformable

$$\mathbf{v}_a(P) = \mathbf{v}_a(A) + \underbrace{\mathbf{v}_r(P)}_{=0} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P) \quad (10.24)$$

- **Cinématique du solide indéformable** : notation allégée

$$\mathbf{r}_r(P) \equiv \mathbf{AP} \quad \mathbf{v}_a(A) \equiv \mathbf{V}_A \quad \mathbf{v}_a(P) \equiv \mathbf{V}_P \quad (12.3)$$

- **Relation entre les vitesses** : points  $A$  et  $P$  du solide indéformable

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A \quad (12.4)$$

- **Relation entre les vitesses** : points  $A$  et  $Q$  du solide indéformable

$$(12.5)$$

- **Relation entre les vitesses** : points  $P$  et  $Q$  : (12.5) - (12.4)

$$(12.6)$$

- **Relation entre les vitesses** : points  $P$  et  $Q$  quelconques du solide

$$(12.7)$$

on imagine que le drone appartient à la plateforme, et on regarde le mouvement de la plateforme elle-même. Ce qui veut dire que la vitesse relative et l'accélération relative du drone, par rapport à la plateforme, sont nulles. D'accord ? Donc, si on prend un point  $P$  qui appartient au solide indéformable, il n'a pas de mouvement par rapport au solide indéformable, ce qui veut dire que sa vitesse relative est nulle, et il en va de même pour son accélération relative. D'accord ? Donc, maintenant, on va pouvoir utiliser une notation qui est un petit peu moins lourde, disons, que celle pour le mouvement relatif, puisqu'on n'a plus de vecteurs, vitesse relative et de vecteurs, accélération relative. On va donc décrire le mouvement à l'aide de la position relative du point  $P$  par rapport à l'origine du repère dans le solide indéformable. D'accord ? Tout simplement le point qui le sépare de l'origine, qui était l'origine  $A$  sur le solide indéformable, c'est donc le vecteur  $\mathbf{AP}$ . Ensuite, le vecteur vitesse absolu du point  $P$ , on va simplement le noter grand  $\mathbf{V}$  indice  $A$ . On prend des lettres majuscules, puisqu'on parle d'un solide indéformable. C'est la convention d'écriture qu'on avait commencé à introduire lorsqu'on a parlé d'un système de points matériels adessants, puisque maintenant, elle va s'avérer payante. Ensuite, l'accélération absolue du point  $P$ , ce sera donc le vecteur  $\mathbf{V}$  indice  $P$ ,  $\mathbf{V}$  majuscule toujours. Dans la même veine, l'accélération absolue du point  $A$ , c'est le vecteur  $\mathbf{A}$  indice  $A$ , et finalement, l'accélération absolue du point  $P$ , c'est le vecteur grand  $\mathbf{A}$  indice grand  $P$ . Alors, ce qu'on va faire après la pause, c'est qu'on va partir des équations qui lient les vitesses de deux points pour le mouvement relatif, et les accélérations de ces points, et on va particulariser ceci au solide indéformable, et on trouvera ainsi les relations qui définissent la cinématique du solide indéformable. En fait, on

notes

résumé

- **Vitesses** : deux points  $A$  et  $P$  du solide indéformable

$$\mathbf{v}_a(P) = \mathbf{v}_a(A) + \underbrace{\mathbf{v}_r(P)}_{=0} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P) \quad (10.24)$$

- **Cinématique du solide indéformable** : notation allégée

$$\mathbf{r}_r(P) \equiv \mathbf{AP} \quad \mathbf{v}_a(A) \equiv \mathbf{V}_A \quad \mathbf{v}_a(P) \equiv \mathbf{V}_P \quad (12.3)$$

- **Relation entre les vitesses** : points  $A$  et  $P$  du solide indéformable

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A \quad (12.4)$$

- **Relation entre les vitesses** : points  $A$  et  $Q$  du solide indéformable

$$(12.5)$$

- **Relation entre les vitesses** : points  $P$  et  $Q$  : (12.5) - (12.4)

$$(12.6)$$

- **Relation entre les vitesses** : points  $P$  et  $Q$  quelconques du solide

$$(12.7)$$

a déjà fait le travail. Oui ? Il y a quelque chose qui ne marche pas avec la vitesse. Il y a quelque chose qui ne marche pas avec la vitesse. Qu'est-ce que c'est ? ... Ah, c'était A, oui, merci. J'ai mis P. Oui, mais non, c'est A. Bravo. Vous n'êtes pas endormis, c'est bien. Alors, on peut maintenant prendre la pause, et puis après la pause, on verra qu'on peut... Oui, on remarque de la part de Thomas. Je vais vous passer le micro. C'est pour le speed rate série. Oui, oui, oui. Bonjour. Je vous pique vraiment un minimum de temps. C'est juste pour vous annoncer que Vendredi 13 décembre, il y a un speed run série qu'on fait avec moi et Quentin. Quentin, malheureusement, il y a un contre-temps, donc il n'est pas là, mais c'est lui qui a l'initiative de la chose, quand même, de rendre un César, c'est qu'un César. Juste qu'est-ce que c'est ? Avec les deux, on va repasser sur toutes les séries, pendant deux heures, donc ça va être dense. On va surtout vous donner où sont les pièges, où sont les petites difficultés, en fait, de toutes les séries d'exercice, puis on va passer dessus pour vous aider. C'est en CM5, si je me trompe pas. Voilà, CM5. Il y a toujours les séries d'exercice en parallèle habituellement, si vous voulez faire la série 13 à l'exil, sans souci. Sinon, vous pouvez aussi venir en CM5, du coup, vendredi 13 décembre de 10h15, on commence à 10h15, jusqu'à midi, il est possible qu'on dépasse de quelques minutes. Sachez-le. Donc voilà. Bonne pause. Un grand bravo, un grand bravo à Thomas et à Quentin pour cette initiative. J'aimerais souligner le fait que Thomas, par exemple, a participé déjà à Student for Student, avec beaucoup de succès. Donc je suis sûr qu'il pourra vous guider avec beaucoup de soins et, disons, également

notes

résumé

- **Vitesses** : deux points  $A$  et  $P$  du solide indéformable

$$\mathbf{v}_a(P) = \mathbf{v}_a(A) + \underbrace{\mathbf{v}_r(P)}_{=0} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P) \quad (10.24)$$

- **Cinématique du solide indéformable** : notation allégée

$$\mathbf{r}_r(P) \equiv \mathbf{AP} \quad \mathbf{v}_a(A) \equiv \mathbf{V}_A \quad \mathbf{v}_a(P) \equiv \mathbf{V}_P \quad (12.3)$$

- **Relation entre les vitesses** : points  $A$  et  $P$  du solide indéformable

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A \quad (12.4)$$

- **Relation entre les vitesses** : points  $A$  et  $Q$  du solide indéformable

$$(12.5)$$

- **Relation entre les vitesses** : points  $P$  et  $Q$  : (12.5) - (12.4)

$$(12.6)$$

- **Relation entre les vitesses** : points  $P$  et  $Q$  quelconques du solide

$$(12.7)$$

avec beaucoup de connaissances quand on succède à un examen, puisqu'il a lui-même bien briamment réussi son examen physique à l'époque, et il pourra vous aider en vous donnant les petits tuyaux qui pourraient vous aider. Mais j'insiste sur un point. Thomas ne connaît pas le sujet d'exemple inutile de lui poser la question, ainsi qu'à Quentin. Ça reste classifié. Voilà. Donc juste... Juste avant la pause, on a introduit une notation qui consiste à prendre tous les points qui appartiennent au solide indéformable, de noter leur accélération et vitesse avec des majuscules, et de mettre comme un 10 simplement le point auquel on serait faire, puisqu'il n'y a pas de mouvement relatif. Ça n'a rien de spécifié si c'est absolu ou relatif. Ça simplifie la notation. Alors maintenant, on aimerait, dans un premier temps, trouver une relation qui lit les vitesses de deux points matériels. Quelqu'un qui appartient à nos solides indéformables. Si je fais tourner ce carton dans n'importe quel sens, je prends deux points au hasard sous le carton. Clairement, ils n'ont pas la même vitesse. On aimerait lier ces vitesses entre elles. Donc, qu'est-ce qu'on fait ? On va prendre la formule qu'on a établie dans le cadre de la dynamique du mouvement relatif. Et puis, on va la particulariser. Donc, si on prend le point matériel  $P$ , il n'a pas de mouvement relatif par rapport au solide indéformable, puisqu'il appartient au solide indéformable, il appartient au référentiel relatif. Donc, sa vitesse relative est nulle. Compte tenu d'une annotation qu'on a introduit, on peut alors écrire que la vitesse absolue du point  $P$  qui est la vitesse du point  $P$ , c'est la vitesse absolue du point  $A$  qui est la vitesse du point  $A$ ,

notes

résumé

- **Accélérations** : deux points  $A$  et  $P$  du solide indéformable (10.36)

$$\mathbf{a}_a(P) = \mathbf{a}_a(A) + \underbrace{\mathbf{a}_r(P)}_{=0} + \underbrace{\Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}_r(P))}_{=0} + 2 \underbrace{\Omega \times \mathbf{v}_r(P)}_{=0} + \dot{\Omega} \times \mathbf{r}_r(P)$$

- **Cinématique du solide indéformable** : notation allégée

$$\mathbf{r}_r(P) \equiv \mathbf{AP} \quad \mathbf{a}_a(A) \equiv \mathbf{A}_A \quad \mathbf{a}_a(P) \equiv \mathbf{A}_P \quad (12.3)$$

- **Relation entre les accélérations** : points  $A$  et  $P$  du solide indéformable (12.8)

- **Relation entre les accélérations** : points  $A$  et  $Q$  du solide indéformable (12.9)

- **Relation entre les accélérations** : points  $P$  et  $Q$  : (12.9) - (12.8) (12.10)

- **Relation entre les accélérations** : points  $P$  et  $Q$  quelconques du solide (12.11)

plus le produit vectoriel de  $\Omega$  avec le vecteur position relative du point  $P$  qui est simplement le vecteur qui va de l'origine  $A$  jusqu'au point  $P$ . Alors, cette relation, c'est presque ce qu'on veut, mais pas tout à fait. Pourquoi ? Parce qu'en fait, ici, vous voyez que le point  $A$  apparaît, le point  $A$ , c'est l'origine, c'est un point particulier. Nous, on aimerait une relation qui soit vraie, quelle que soit les points qu'on ait choisis. Alors, prenons un autre point, un point  $Q$ . Ce point  $Q$  va satisfaire le même type de relation entre les vitesses que le point  $P$ . Donc, on écrit la même relation remplacée par  $Q$ . On aura que la vitesse de  $Q$ , c'est la vitesse de  $A$ , plus le produit vectoriel entre  $\Omega$  et  $AQ$ . Bon, alors maintenant, on va prendre la différence entre la deuxième relation et la première. On aura alors que  $v_Q$  moins  $v_P$ , c'est le produit vectoriel de  $\Omega$  avec  $AQ$  moins  $AP$ .  $AQ$  moins  $AP$ , c'est  $PA$  plus  $AQ$ , c'est donc  $PQ$ . Donc, la vitesse du point  $Q$ , c'est la vitesse du point  $P$ , plus le produit vectoriel de  $\Omega$  avec  $PQ$ . D'accord ? Quel que soit le point  $P$ , quel que soit le point  $Q$ , qui appartient au solide indéformable, cette relation sera toujours vraie. Elle sera en particulier intéressante pour le centre de masse et le point de contact entre le solide indéformable et la surface sur laquelle celui-ci roule. D'accord ? Voilà. Alors, de manière similaire,

notes

résumé

50m 1s



- Roulement avec glissement : (12.7)

(12.12)

où  $V_G \equiv V_Q$  et  $V_C \equiv V_P$ 

- Glissement sans roulement :

(12.13)

Translation du point de contact  $C$  sans rotation propre du solide autour du centre de masse  $G$ .

- Roulement sans glissement :

(12.14)

Rotation propre du solide autour du centre de masse  $G$  sans translation du point de contact  $C$ .

Sphère ou cylindre  
plan vertical



$G$  = centre de masse  
 $C$  = point de contact



En roulement sans glissement, le point de contact  $C$  change au cours du temps, mais à chaque instant sa vitesse par rapport au sol  $V_C$  est nulle.

on a besoin d'une relation qui lit les accélérations de deux points quelconques de notre solide indéformable. Donc, on part de la description du mouvement relatif, qui est ici. OK ? On sait que l'accélération relative du point P est nulle puisqu'il appartient au solide indéformable. Il en va de même de la vitesse relative du point P, donc le terme d'accélération de coriolisse disparaît. OK ? Et alors, on peut écrire que l'accélération absolue du point P, c'est l'accélération absolue du point A, plus un terme d'accélération centripète, du mouvement relatif d'un point par rapport à l'autre, qui est le produit vectoriel de  $\omega$ , avec le produit vectoriel de  $\omega$ , avec le vecteur position relative du point P, qui est le vecteur AP, plus le produit vectoriel de l'accélération angulaire du mouvement de notre solide indéformable, avec le vecteur position relative qui est le vecteur AP. OK ? Là encore, on a un point A, on a un point P, nous ce qu'on aimerait, c'est une relation générale, pour un point P et un point Q. Donc, on reprend cette même expression en place, et par cul, quand c'est juste de l'écriture. On a le terme d'accélération centripète, plus le terme d'accélération de l'air ou d'accélération tangentielle. Pour faire disparaître le point A, on prend la différence entre ces deux relations, on va retrancher la première à la seconde, et on va donc se retrouver avec la différence entre l'accélération du point Q, S, L, du point P, qui va être le produit vectoriel de  $\omega$ , avec le vecteur obtenu par produit vectoriel de  $\omega$ , et de AQ, moins AP. On a ensuite  $\omega$  point, dont on prend le produit vectoriel, avec AQ, moins AP. D'après la même logique que tout à l'heure, AQ moins AP, c'est PA plus AQ, c'est-à-dire que c'est PQ. Donc, l'accélération de Q, c'est l'accélération de P, plus le produit vectoriel de  $\omega$  avec

notes

résumé

51m 39s



- **Roulement avec glissement :** (12.7)

(12.12)

où  $V_G \equiv V_Q$  et  $V_C \equiv V_P$ 

- **Glissement sans roulement :**

(12.13)

**Translation** du point de contact  $C$  sans rotation propre du solide autour du centre de masse  $G$ .

- **Roulement sans glissement :**

(12.14)

**Rotation propre** du solide autour du centre de masse  $G$  sans translation du point de contact  $C$ .

Sphère ou cylindre  
plan vertical



$G$  = centre de masse  
 $C$  = point de contact



En roulement sans glissement, le point de contact  $C$  change au cours du temps, mais à chaque instant sa vitesse par rapport au sol  $V_C$  est nulle.

PQ, plus le produit vectoriel de  $\omega$  point avec PQ. Quand ? La cinématique du sol inanimé est quasiment bouclée. Vous voyez que ce n'est pas compliqué, tout est basé sur mouvement relatif consymplifié. Il y a une considération qui est très importante, du point de vue pratique,

notes

résumé

**12.2 Dynamique du solide indéformable****12.2.1 Théorèmes de transfert du moment cinétique****12.2.2 Théorèmes de transfert de moments de force****12.2.3 Théorèmes du moment cinétique évalué en un point**

en exercice et potentiellement à l'examen. C'est la condition de roulement et la condition de glissement. Pour le comprendre, il faut prendre un objet qui roule, ou qui peut rouler. Donc, un cylindre ou une sphère, prenez cette bouteille d'évian. Je peux la faire rouler sur la table. Si je la fais rouler, qu'est-ce qui se passe ? L'orientation change, les logos évians apparaissent et disparaissent. Bon, si je la fais glisser, un glissement pur, le logo évian reste toujours là où il est. Il n'y a pas de changement d'orientation. La bouteille glisse comme ça. Ça, c'est un glissement pur, sans changement d'orientation,  $\omega$  est nul. Ça, c'est un roulement. Évidemment, on peut les combiner. Ça glisse et ça roule. Donc, dans le cas général, on a la formule générale. Cette formule générale, on va l'appliquer par rapport à deux points. Deux points qui sont choisis au hasard, qui sont choisis avec soin. Si on prend notre objet dans un plan vertical en couple, qui passe par le centre de masse, il y a un point stratégique qui est le centre de masse, un autre point stratégique qui est le point de contact entre l'objet et la surface sur laquelle celui-ci roule, par exemple, le référencier à l'inertie des pas. Alors, bon, on choisit comme point G le point Q, et comme point C le point P. Donc, on a  $V_Q$ , c'est-à-dire  $V_G$ , qui est égal à  $V_P$ , c'est-à-dire  $V_C$ , plus le produit vectoriel de  $\omega$  avec  $PQ$ , c'est-à-dire avec  $CG$ . Voilà la formule générale qui décrit le mouvement de roulement avec glissement d'un solide indéformable par rapport à une surface. Alors, comme on l'a dit, il y a deux cas extrêmes possibles. Le cas où il y a un glissement sans roulement, si il y a un glissement sans roulement, ça veut dire qu'il n'y a pas de changement d'orientation de l'objet. Et donc, le centre de masse

## notes

## résumé

54m 10s



**12.2 Dynamique du solide indéformable**

12.2.1 Théorèmes de transfert du moment cinétique

12.2.2 Théorèmes de transfert de moments de force

12.2.3 Théorèmes du moment cinétique évalué en un point

G, et le point de contact ont la même vitesse, ils se déplacent ensemble, soit vers la droite, soit vers la gauche.  $\Omega$  est nul, donc. Ça, c'est un glissement sans roulement. Et donc, si il y a un glissement sans roulement, la vitesse du centre de masse, c'est la vitesse du point de contact. D'accord ? On peut avoir le contraire. On peut avoir, et ça, c'est plus technique, un roulement sans glissement. Si ça glisse, ça veut dire que ce point-là, le point c'est à une vitesse non nulle. Quand on a un pur roulement sans glissement, la bouteille pivote autour du point de contact à chaque instant. D'accord ? Mais si on regarde, prenez-nous par exemple un roulement vers la droite, si on regarde les vecteurs vitesses des différents points, eh bien, la vitesse du point de contact sera nulle. Le point à côté a une petite vitesse, ensuite, elles sont de plus en plus grandes. D'accord ? Orienté vers le haut. Et c'est la même chose orienté vers le bas à droite. Mais le point de contact lui-même a une vitesse nulle. Si il y a un roulement sans glissement. D'accord ? Alors, vous me direz oui, mais le point, il change absolument. Si vous prenez physiquement un point sur la bouteille, le point de contact, à un instant, vous avez un certain point, à un instant plus tard, à un instant infinitésimal plus tard, un délé plus tard, vous avez le point voisin qui est en contact. Mais un instant donné, le point de la bouteille qui est en contact avec la surface a une vitesse nulle. Autrement, ça glisse. On ne veut pas que ça glisse. On veut que ça roule seulement. D'accord ? Donc, ça paraît un peu paradoxal, mais c'est important, et c'est pour ça que, comme c'est un peu contre-intuitif, vous avez un signe. Attention, OK ? Le point de contact

## notes

## résumé

**12.2 Dynamique du solide indéformable****12.2.1 Théorèmes de transfert du moment cinétique****12.2.2 Théorèmes de transfert de moments de force****12.2.3 Théorèmes du moment cinétique évalué en un point**

qui change au cours du temps  $a$ , à chaque instant, le point de l'objet qui est en contact avec la païsseole, une vitesse nulle dans le cas du roulement sanglisement. Donc, si il a une vitesse nulle, ça veut dire que  $V_c$  est égal à 0. Et donc, la vitesse du centre de masse  $V_g$  peut être obtenue en prenant le produit vectoriel de  $\omega$  avec le vecteur  $CG$ . Donc, concrètement, ça veut dire qu'un instant donné, ce point est immobile, et que le centre de masse pivote autour du point de contact. Vous pouvez imaginer que vous placez la pointe du compas au niveau du point de contact, et que vous avez la mine qui décrit le mouvement du centre de masse qui pivote à chaque instant autour du point de contact. D'accord ? C'est ça l'idée ici. Donc, ça, ça va être essentiel en exercice, et potentiellement, à l'examen. Il faut vraiment avoir compris cette idée. Il faut bien avoir compris que, quand il y a un roulement sanglisement, le point de contact a une vitesse nulle, et on va voir que, pour que ce soit possible, dynamiquement, les rassaces d'après-midi, on est obligé de considérer que ce point est retenu. D'accord ? Si ça tourne, il doit être retenu, parce que s'il n'est pas retenu, ça glisse. Donc, il y a une force de frottement statique qui ne travaille d'ailleurs pas, qui va permettre le mouvement pivotement du solide autour du point de contact. Il y avait une question ? — Mais vous vissez l'égal 0, c'est la définition du roulement sanglisement. — Exactement. Tout à fait. Donc,  $v_c$  égal 0, c'est ce que vous voulez absolument avoir quand vous roulez avec votre voiture sur une roule chaussée mouillée. Ce qui est dangereux, c'est  $v_c$  différentes zéro. D'accord ? Là, ça dérape. Là, vous partez en aqua-planing. D'accord ? C'est-à-dire que les pneus ont une vitesse relative

## notes

## résumé

**12.2 Dynamique du solide indéformable**

12.2.1 Théorèmes de transfert du moment cinétique

12.2.2 Théorèmes de transfert de moments de force

12.2.3 Théorèmes du moment cinétique évalué en un point

non nulle par rapport à l'asphalte, ce qu'il ne faut surtout pas avoir, parce que la voiture n'est plus maîtrisable. D'accord ? En vanche, si elle roule, le point des pneus qui est en contact avec le sol, à chaque instant, a une vitesse nulle. Alors évidemment que les routes ont de vitres. Donc, à chaque instant, c'est des points différents. Mais à un moment donné, à un instant t donné, le point de la roue qui est en contact avec le sol a une vitesse instantanée nulle. D'accord ?

notes

résumé

- Quantité de mouvement : solide indéformable (11.88)

$$P = \sum_{\alpha} p_{\alpha} = M V_G \quad (11.87)$$

- Moment cinétique : évalué à l'origine fixe  $O$  (11.80)

$$L_O = \sum_{\alpha} L_{O,\alpha} = \sum_{\alpha} O P_{\alpha} \times p_{\alpha} \quad (11.87)$$

- Moment cinétique : évalué aux points  $O$  et  $P$  du solide indéformable

(12.17)

- Théorème de transfert du moment cinétique : entre les points  $O$  et  $P$

(12.18)

Voilà. Passons maintenant à la dynamique du solide indéformable. Comme je l'ai dit au départ du courant, un solide indéformable, c'est un système de ponds matériels qui a la propriété que la distance qui sépare les ponds matériels est constante au conduisant. D'accord ? Donc la forme, le volume ne change pas. C'est juste l'orientation qui peut être modifiée. Et donc, on va pouvoir utiliser telle quelle les théorèmes qu'on a annoncé la semaine passée pour un système de ponds matériels. Le premier, c'était le théorème du sang de masse, qui nous dit alors que la somme des forces extérieures exercée sur le solide indéformable, qui peut être exercée en des points différents. C'est une somme vectorielle de force. D'accord ? Cette somme de force extérieure, c'est la dérivé temporelle de la quantité de mouvement totale qui est portée par le sang de masse du solide indéformable. Donc, le sang de masse porte la quantité de mouvement qui est le produit de la masse pour la vitesse du sang de masse, ou ici, la masse pour un solide indéformable, elle est constante. Sinon, il se déforme automatiquement. D'accord ? Donc la dérivé de la quantité de mouvement, c'est le produit de la masse pour la dérivé temporelle, la vitesse du sang de masse qui est son accélération. OK ? Donc là, on décrit un mouvement de translation ou un mouvement de rotation du sang de masse. D'accord ? Sans changement d'orientation. Bon. On a également le théorème du moment siéantique qu'on avait évalué à l'origine. La somme des moments de force extérieure évalués à l'origine, c'est la dérivé temporelle du moment siéantique évalué à l'origine. Alors, attention ! Il y a pas mal d'informations cachées dans ce théorème. D'accord ? Si on reprend la bouteille des viens, on a deux mouvements de rotation qui sont décrits par le théorème que vous voyez ici. Le mouvement de rotation propre, où le

notes

résumé

60m 8s



- Quantité de mouvement : solide indéformable (11.88)

$$\mathbf{P} = \sum_{\alpha} \mathbf{p}_{\alpha} = M \mathbf{V}_G \quad (11.87)$$

- Moment cinétique : évalué à l'origine fixe  $O$  (11.80)

$$L_O = \sum_{\alpha} L_{O,\alpha} = \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \times \mathbf{p}_{\alpha} \quad (11.87)$$

- Moment cinétique : évalué aux points  $O$  et  $P$  du solide indéformable

(12.17)

- Théorème de transfert du moment cinétique : entre les points  $O$  et  $P$

(12.18)

logo est vian, tourne autour de son axe de rotation, ainsi que le mouvement de rotation autour d'un axe. Réler deux combinés. D'accord ? Evidemment, ce qui va nous intéresser, nous, c'est le mouvement de rotation propre qu'on va devoir découpler de l'autre mouvement de rotation, et c'est ce qu'on va faire dans quelques instants. D'accord ? Pour pouvoir le faire, il faudra réexprimer ce théorème du moment siéantique par rapport à un point quelconque du solide anéformable, en particulier par rapport au sang de masse et par rapport au point de contact que celui-ci pourrait avoir avec une surface sur laquelle celui-ci évolue, dans le cas particulier où on a un roulement sans glissement.

notes

résumé

- **Solide indéformable** : étant donné qu'un solide indéformable est un système fermé de points matériels dont les distances relatives sont fixes, les théorèmes du centre de masse et du moment cinétique sont les mêmes que pour un système fermé de points matériels.

1 **Théorème du centre de masse** : solide indéformable

$$\sum \vec{F}^{ext} = \dot{\vec{P}} = M\vec{A}_G \quad \text{car} \quad \vec{P} = M\vec{V}_G \quad \text{où} \quad M = \text{cte} \quad (12.15)$$

Mouvement de translation et de rotation du centre de masse  $G$

2 **Théorème du moment cinétique** : solide indéformable

$$\sum \vec{M}_O^{ext} = \dot{\vec{L}}_O \quad (12.16)$$

Mouvement de rotation du centre de masse  $G$  autour de l'origine  $O$  et mouvement de rotation propre du solide indéformable autour d'un axe passant par le centre de masse  $G$ , évalués par rapport à l'origine  $O$ .

Alors, on va donc établir une série de théorèmes. On va essayer de faire ça rapidement. Ils sont pas hyper... Ils sont... Enfin, leur application est importante. Les théorèmes en soi sont juste du net de pratique. Oui ?

notes

résumé

62m 40s



- Quantité de mouvement : solide indéformable (11.88)

$$P = \sum_{\alpha} p_{\alpha} = M V_G \quad (11.87)$$

- Moment cinétique : évalué à l'origine fixe  $O$  (11.80)

$$L_O = \sum_{\alpha} L_{O,\alpha} = \sum_{\alpha} OP_{\alpha} \times p_{\alpha} \quad (11.87)$$

- Moment cinétique : évalué aux points  $O$  et  $P$  du solide indéformable

(12.17)

- Théorème de transfert du moment cinétique : entre les points  $O$  et  $P$

(12.18)

... On l'a démontré la semaine passée. On l'a démontré pour un système de points matériels. Ce qu'on a déjà vu tout de suite, c'est que la quantité de mouvement était portée par un seul point qu'il s'agit de masse. On peut décrire le mouvement considérant un point particulier qu'il s'agit de masse qui porte toute la quantité de mouvement. On a vu que la quantité de mouvement relative était nulle. Partant de là, puisque la quantité de mouvement, les forces sont extensives, si vous summez les quantités de mouvement de tous les composants, de tous les points matériels qui forment le solide anéformable, vous avez la quantité de mouvement totale. Vous allez sommer toutes les forces. Et donc, vous retrouvez la même structure, à savoir que la somme des forces extérieures exercées sur l'ensemble de tous les points matériels du solide anéformable, c'est une somme vectorielle, et est égale à la dérivée temporelle de la quantité de mouvement totale. Comme la masse est constante, vous la mettez en évidence. Vous avez donc le produit d'une masse fois l'accélération du centre de masse. En fait, quelque part, c'est assez rassurant, puisque quand on a un point matériel, c'est un modèle très simple, et derrière, il y a toujours un solide anéformable, et ça marche. Donc, ça reste vrai pour le solide anéformable. Seulement que maintenant, on voit la chose dans une perspective plus large, on va pouvoir décrire aussi le nombre de degrés de liberté. C'est plus clair ? Parfait.

notes

résumé

62m 55s



- Théorème de transfert du moment cinétique : entre les points  $O$  et  $P$

$$L_O = OP \times M V_G + L_P = R_P \times P + L_P \quad (12.18)$$

- Théorème de Koenig : (12.18) point  $P \equiv G$

$$(12.19)$$

- Rotation du centre de masse :  $R_G \times P$  (point matériel)

- Rotation propre :  $L_G$  (solide indéformable)

- Théorème de transfert du moment cinétique : (12.18) et (12.19)

$$(12.20)$$

- Théorème de transfert du moment cinétique : entre les points  $P$  et  $G$

$$(12.21)$$

- Théorème de transfert du moment cinétique : entre les points  $C$  et  $G$

$$(12.22)$$

OK. Donc, partons du moment cinétique évalué à l'origine pour l'exprimer par rapport à n'importe quel point, qui appartient au solide anéformable, le point  $P$ , par exemple. On écrit donc notre moment cinétique, qui est la somme sur les points matériels, de leur vecteur position par rapport à l'origine, dont on prend le produit vectoriel avec la quantité de mouvement. Et ce qu'on va faire maintenant, c'est qu'on va réécrire le premier vecteur en le divisant en deux. On va d'abord prendre un vecteur qui part de l'origine pour aboutir au point  $P$  du solide anéformable, plus un vecteur qui part de ce point  $P$  pour aller au point matériel considéré le point  $P$  alpha. Et on prend le produit vectoriel avec  $P$  alpha. On va donc développer cette somme en mettant en évidence au  $P$  qui ne dépend pas de la somme sur alpha, dont on prend le produit vectoriel avec la somme sur alpha des  $P$  alpha. D'accord ? Et on ajoute à ceci la somme sur alpha du produit vectoriel des  $P$   $P$  alpha avec la quantité de mouvement petit  $P$  alpha. Attention, c'est des  $P$  majuscules ici, c'est une minuscule là. D'accord ? Alors, si maintenant on prend le premier terme, la somme sur alpha des  $P$  alpha, c'est la somme des quantités de mouvement, des points matériels qui constituent le solide anéformable. Ce sera donc la quantité de mouvement totale. On aura donc le produit vectoriel du vecteur au  $P$  avec la quantité de mouvement totale du solide anéformable qui est le produit de sa masse fois la vitesse du sang de masse. D'accord ? Et puis, si on prend le deuxième terme qui apparaît ici, on peut découvrir ce qu'il représente en regardant son corollaire défini par rapport à l'origine. Qu'est-ce qui change ? Ce qui change, c'est le point  $P$  ici, qui était un point haut avant. Dans le premier exemple, on a

notes

résumé

64m 21s



- Théorème de transfert du moment cinétique : entre les points  $O$  et  $P$

$$L_O = OP \times M V_G + L_P = R_P \times P + L_P \quad (12.18)$$

- Théorème de Koenig : (12.18) point  $P \equiv G$

$$(12.19)$$

- Rotation du centre de masse :  $R_G \times P$  (point matériel)

- Rotation propre :  $L_G$  (solide indéformable)

- Théorème de transfert du moment cinétique : (12.18) et (12.19)

$$(12.20)$$

- Théorème de transfert du moment cinétique : entre les points  $P$  et  $G$

$$(12.21)$$

- Théorème de transfert du moment cinétique : entre les points  $C$  et  $G$

$$(12.22)$$

le moment siéthique évalué par rapport à l'origine. Dans le deuxième exemple, on aura le moment siéthique évalué par rapport au point  $P$ . Donc là, on ajoute, le moment siéthique évalué par rapport au point  $P$ . Et donc, on a notre théorème de transfert à savoir que le moment siéthique évalué à l'origine, c'est au  $P$  produit vectoriel avec  $M v_g$ , plus  $L_P$  qu'on peut aussi récrire comme le produit vectoriel du vecteur position du point  $P$  avec la quantité de mouvement totale du système qui est  $P$  à laquelle on ajoute le moment siéthique évalué en  $P$ . D'accord ? Alors, maintenant, comme point particulier d'intérêt,

notes

résumé

- Forces extérieures : solide indéformable (11.93)

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = M \mathbf{A}_G \quad (11.89)$$

- Moments de forces extérieures : évalué à l'origine fixe  $O$  (11.81)

$$\sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \mathbf{M}_{O,\alpha}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \quad (11.89)$$

- Moment de forces extérieures : évalué aux points  $O$  et  $P$

(12.23)

- Théorème de transfert de moments de force : entre les points  $O$  et  $P$

(12.24)

le plus intéressant, c'est le sang de masse. Et là, on va découvrir la physique. D'accord ? Donc, si on prend comme point  $P$  le sang de masse, on obtiendra ce qui s'appelle le théorème de Koenig, le premier théorème de Koenig. Le moment siéthique évalué par rapport à l'origine, ce sera alors le vecteur au  $g$ . On a remplacé  $P$  par  $g$ , produit vectoriel avec  $M \mathbf{v}_g$ , plus  $I_g$ , qui est le moment siéthique du solide indéformable, évalué par rapport au sang de masse, et celui qui va jouer un rôle très important par la suite. D'accord ? Donc, on a le produit vectoriel du vecteur position du sang de masse avec la quantité de mouvement total, plus le moment siéthique évalué autour du sang de masse. Et là, on s'arrête un instant, puisqu'il y a un sens physique très intéressant qui se cache là-dedans. Ok ? Supposons que  $I_g$  soit nul. On regarde le premier terme qui est ici. Qu'est-ce qui décrit ? C'est le produit vectoriel du vecteur position du sang de masse avec la quantité de mouvement total de l'objet porté par le sang de masse. On est en train de décrire le moment siéthique lié au mouvement de rotation du sang de masse uniquement sans changement d'orientation. Ça, c'est ce qu'on savait déjà de la dynamique du point matériel. Maintenant, il y a un ajout supplémentaire, c'est le terme qui est là qui est absent pour le point matériel. Si vous regardez un point tourné sur lui-même, c'est absurde. D'accord ? Il n'y aura pas de moment siéthique d'un point qui tourne sur lui-même. Par contre, si vous prenez un solide indéformable, que vous le faites tourner autour de sang de masse, il y aura un moment siéthique. Ce moment siéthique lié à la rotation propre, c'est celui-ci. Donc, on vient de découpler la partie liée au mouvement du sang de masse, à la rotation

notes

résumé

66m 37s



- Forces extérieures : solide indéformable (11.93)

$$\sum \mathbf{F}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = M \mathbf{A}_G \quad (11.89)$$

- Moments de forces extérieures : évalué à l'origine fixe  $O$  (11.81)

$$\sum \mathbf{M}_O^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \mathbf{M}_{O,\alpha}^{\text{ext}} = \sum_{\alpha} \mathbf{OP}_{\alpha} \times \mathbf{F}_{\alpha}^{\text{ext}} \quad (11.89)$$

- Moment de forces extérieures : évalué aux points  $O$  et  $P$

(12.23)

- Théorème de transfert de moments de force : entre les points  $O$  et  $P$

(12.24)

du sang de masse du solide indéformable, et la partie liée à la rotation propre. D'accord ? Continuons. On a besoin maintenant d'exprimer le moment siéthique au niveau du point de contact en termes du moment siéthique évalué au sang de masse. Alors, ce qu'on va faire, c'est qu'on va repartir de la relation qui est ici en tirer  $L_P$  en termes de  $L_O$ . Donc, on va écrire que le moment siéthique évalué en  $P$ , c'est moins le produit vectoriel de  $OP$  avec  $MVG$  plus  $L_O$ . Or,  $L_O$ , on l'a obtenu par le théorème de Koenig qui est ici. Donc, on substitue. Et on se retrouve avec  $OG$  moins  $OP$ , produit vectoriel avec  $MVG$  plus  $L_G$ . D'accord ? Alors,  $OG$  moins  $OP$ , c'est  $PO$  plus  $OG$ , c'est  $PG$ . Donc, le moment siéthique évalué en un point  $P$ , quelconque du solide indéformable, c'est le produit vectoriel de  $PG$  avec  $MVG$  plus  $L_G$ . On a donc lié le moment siéthique évalué en un point  $P$ . Quelconque au moment siéthique évalué au point  $G$ . Alors, maintenant, on prend comme point quelconque le point de contact entre le solide indéformable et la surface sur laquelle celui-ci roule. On aura donc  $LC$  qui est égal à  $CG$ , produit vectoriel avec  $MVG$  plus  $L_G$ . Alors, parmi ces trois relations, la plus importante de loin, c'est la première qui est ici. Ensuite, cette c'est importante, mais dans une moindre mesure. D'accord ? Voilà. Donc, ce qu'on a fait pour le moment siéthique, on va devoir le refaire pour les moments de force.

notes

résumé

- Théorème de transfert de moments de force : entre les points  $O$  et  $P$

$$\sum M_O^{\text{ext}} = OP \times M A_G + \sum M_P^{\text{ext}} = \sum R_P \times F^{\text{ext}} + \sum M_P^{\text{ext}} \quad (12.24)$$

- Théorème de transfert de moments de force : (12.24) point  $P = G$

$$(12.25)$$

- Rotation du centre de masse :  $\sum R_G \times F^{\text{ext}}$  (point matériel)

- Rotation propre :  $\sum M_G^{\text{ext}}$  (solide indéformable)

- Théorème de transfert de moments de force : (12.24) et (12.25)

- Théorème de transfert de moments de force : entre les points  $P$  et  $G$

$$(12.27)$$

- Théorème de transfert de moments de force : entre les points  $C$  et  $G$

$$(12.22)$$

OK ? Donc, on va prendre la somme des moments de force extérieure évalué par rapport à l'origine qu'on décompose en termes de l'action des forces extérieures sur les points matériels. On aura la somme sur les points matériels, des vecteurs positionnent des points matériels, produit vectoriel avec les forces extérieures résultantes exercées sur chacun d'entre eux. On va, comme dans le cas précédent, prendre notre vecteur  $OP$  et le diviser en un vecteur  $OP$  plus un vecteur  $PP$ . On prend le produit vectoriel avec la force extérieure résultante exercée sur le premier matériel alpha. On développe notre produit. On mettra  $OP$  en évidence. On a le produit vectoriel de  $OP$  avec la somme sur les premiers matériels des forces extérieures exercées sur chacun d'entre eux. On va nous rester la somme sur alpha,  $DP$ ,  $PP$  alpha, produit vectoriel avec la force extérieure exercée sur chacun de ces points matériels. Alors, si on prend le premier terme qui est ici, ceci, c'est le produit vectoriel du vecteur  $OP$  avec quoi ? Avec la somme des forces extérieures. Cette somme des forces extérieures, qui, d'après le théorème du sang de masse, elle produit de la masse pour l'accélération du sang de masse. On va donc réécrire de cette manière. Et puis, il va nous rester le terme qui est ici. Si on le compare à celui-ci, on voit que la différence c'est le  $O$  qui est devenu en  $P$ . Donc, la signification de ce terme-là, c'est la somme des moments de force extérieures évalués par rapport au point  $P$  du solide indéformable. Donc, on aura la somme sur les moments de force extérieures évalués par rapport à un point  $P$  quelconque. Donc, maintenant, on a notre premier théorème de transfert pour les moments de force. La somme des moments de force extérieures évalués par rapport au point  $O$ , c'est le produit vectoriel de  $OP$  avec  $MAG$ . Plus, la somme

notes

résumé

70m 5s



- Théorème de transfert de moments de force : entre les points  $O$  et  $P$

$$\sum M_O^{\text{ext}} = OP \times M A_G + \sum M_P^{\text{ext}} = \sum R_P \times F^{\text{ext}} + \sum M_P^{\text{ext}} \quad (12.24)$$

- Théorème de transfert de moments de force : (12.24) point  $P \equiv G$

$$(12.25)$$

- Rotation du centre de masse :  $\sum R_G \times F^{\text{ext}}$  (point matériel)

- Rotation propre :  $\sum M_G^{\text{ext}}$  (solide indéformable)

- Théorème de transfert de moments de force : (12.24) et (12.25)

- Théorème de transfert de moments de force : entre les points  $P$  et  $G$

$$(12.27)$$

- Théorème de transfert de moments de force : entre les points  $C$  et  $G$

$$(12.22)$$

des moments de force extérieures évalués par rapport au point  $P$ . On peut réécrire comme...  $MAG$ , c'est la somme des forces extérieures. Donc, le premier terme, on peut le réécrire comme le vecteur position du point  $P$ , qui est le vecteur  $OP$ , qui est ici le vecteur  $RP$ , produit vectoriel avec les forces extérieures. Plus, un deuxième terme qui est la somme des moments de force extérieures évalués par rapport au point  $P$ . Bon. Alors, évidemment, on va refaire ce qu'on a fait pour le moment scientifique. C'est-à-dire qu'on va considérer comme... Ah oui, il y a un souci. Voilà. Merci.

notes

résumé

- Théorème de transfert du moment cinétique : où  $P = M V_G$

$$L_O = R_P \times M V_G + L_P \quad (12.18)$$

- Dérivée temporelle du moment cinétique : (12.18) où  $M = \text{cste}$

$$(12.29)$$

- Théorème du moment cinétique : évalué à l'origine  $O$

$$\sum M_O^{\text{ext}} = \dot{L}_O \quad (12.16)$$

- Dérivée temporelle du moment cinétique : (12.29) dans (12.16)

$$(12.30)$$

- Théorème de transfert de moments de force :

$$\sum M_O^{\text{ext}} = R_P \times M A_G + \sum M_P^{\text{ext}} \quad (12.25)$$

- Théorème du moment cinétique : en  $P$  (12.30) et (12.25)

$$(12.31)$$

On va donc faire ce qu'on a fait pour le moment scientifique, c'est-à-dire considérer comme premier point d'intérêt le centre de masse. D'accord ? Donc, on remplace le point  $P$  par le point  $G$ . Et là, on va voir toute la signification contenue dans ce théorème de transfert. Donc, la somme des moments de force extérieures évalués par rapport à l'origine, ce sera donc le produit vectoriel de  $OG$  avec  $MAG$ . Plus, la somme des moments de force extérieures évalués par rapport à  $G$ . Qu'on peut donc récrire, comme la somme de quoi, des vecteurs positions, enfin, du vecteur position du centre de masse avec les forces extérieures qui sont appliquées sur le solide indéformable. Plus, la somme des moments de force extérieures évalués maintenant par rapport à  $G$ . Alors, si on regarde ce théorème de transfert, on voit que dans le monde de droite, il y a deux termes. Alors, prenons le cas où le deuxième terme est nul pour l'instant. On regarde le premier terme. Le premier terme, c'est quoi ? C'est le produit vectoriel du vecteur position du centre de masse avec les forces extérieures. Donc, si on a une description qui se fait purement en termes de la dynamique d'un point matériel qui serait le centre de masse, ceci, c'est le moment de force exercé par les forces extérieures sur le centre de masse. C'est comme ça qu'on décrirait la dynamique en rotation d'un point matériel. Seulement, notre solide indéformable, ce n'est pas un point matériel. On peut, par exemple, exercer un couple de forces sur la bouteille pour la faire tourner. D'accord ? Ce couple de forces génère un moment de force qu'on va définir par rapport au centre de masse. Donc, la somme des moments de force extérieures, évaluée par rapport au centre de masse, c'est la cause de la mise en mouvement de rotation propre d'un solide indéformable. D'accord ? Donc, ça, c'est

notes

résumé

72m 50s



- Théorème de transfert du moment cinétique : où  $P = M V_G$

$$L_O = R_P \times M V_G + L_P \quad (12.18)$$

- Dérivée temporelle du moment cinétique : (12.18) où  $M = \text{cste}$

$$(12.29)$$

- Théorème du moment cinétique : évalué à l'origine  $O$

$$\sum M_O^{\text{ext}} = \dot{L}_O \quad (12.16)$$

- Dérivée temporelle du moment cinétique : (12.29) dans (12.16)

$$(12.30)$$

- Théorème de transfert de moments de force :

$$\sum M_O^{\text{ext}} = R_P \times M A_G + \sum M_P^{\text{ext}} \quad (12.25)$$

- Théorème du moment cinétique : en  $P$  (12.30) et (12.25)

$$(12.31)$$

vraiment spécifique au mouvement de rotation propre du solide indéformable, alors que le premier terme décrit la mise en mouvement de rotation du centre de masse autour d'un axe. D'accord ? Donc, je peux prendre cet objet qui est au repos. Je vais l'accélérer sans changer son orientation. D'accord ? Grâce à un moment de force. Ça, c'est le premier terme. Et puis, je peux lui donner une accélération angulaire pour le faire tourner. D'accord ? Ça, c'est décrit par le deuxième terme. Alors, maintenant, il va falloir qu'on exprime les moments de force extérieures évalués par rapport au point  $P$  en termes de ceux évalués par rapport au point  $G$ . Donc, on va partir de l'identité qui est ici pour en extraire la somme des moments de force extérieures évalués en  $P$  qui sera moins le produit vectoriel de  $OP$  avec  $M A_G$ , plus la somme des moments de force extérieures évalués par rapport à l'origine. Et c'est là qu'on se sert du théorème de transfert qu'on a établi ici. OK ? Pour récrire ceci comme au  $G$  moins  $OP$  produit vectoriel avec  $M A_G$ , plus la somme des moments de force extérieures évalués par rapport au sond de base. Au  $G$  moins  $OP$ , c'est  $PO$  plus au  $G$ , c'est  $PG$ . Donc, on a la somme des moments de force extérieures évalués par rapport à  $P$  qui est le produit vectoriel de  $PG$  avec  $M A_G$ , plus la somme des moments de force extérieures évalués par rapport au sond de base. On a un théorème de transfert supplémentaire. Évidemment, qu'est-ce qui nous intéresse ? Quand on écrit un mouvement de roulement sans glissement, c'est de lier la somme des moments de force extérieures au sond de base à celle au niveau du point de contact. Donc, on va prendre comme point d'intérêt particulier le point de contact entre solide et indéformable et la surface sur laquelle celui-ci roule sans

notes

résumé

- Théorème de transfert du moment cinétique : où  $P = M V_G$

$$L_O = R_P \times M V_G + L_P \quad (12.18)$$

- Dérivée temporelle du moment cinétique : (12.18) où  $M = \text{cste}$

$$(12.29)$$

- Théorème du moment cinétique : évalué à l'origine  $O$

$$\sum M_O^{\text{ext}} = \dot{L}_O \quad (12.16)$$

- Dérivée temporelle du moment cinétique : (12.29) dans (12.16)

$$(12.30)$$

- Théorème de transfert de moments de force :

$$\sum M_O^{\text{ext}} = R_P \times M A_G + \sum M_P^{\text{ext}} \quad (12.25)$$

- Théorème du moment cinétique : en  $P$  (12.30) et (12.25)

$$(12.31)$$

glisser. Donc, on remplace  $P$  par  $C$ . On aura alors la somme des moments de force extérieures évalués au niveau du point de contact qui est le produit vectoriel de  $CG$  avec  $M A_G$ , plus la somme des moments de force extérieures évalués par rapport au sond de base. Je vous promets, il n'y en a pas de plus. On a fait le tour des théorèmes de transfert. On les a tous, ok ? Le catalogue est complet. Ils sont d'ailleurs présents sur le formulaire. En cas de besoin, le jour d'examen, il ne faut pas s'en rappeler par coeur. Ça sert à rien du tout, d'accord ? Alors, disons, le théorème qui est ici, il est tellement évident, ok ? Quand on a compris ce que représente un moment de force, qu'on arrive à le retrouver, d'accord, sans avoir à l'apprendre. Il en va de même pour le... Mais il y en a d'autres avec le point  $P$  et le point  $G$  qui sont peut-être un petit peu moins évidents dans la pratique, d'accord ? Mais vous en aurez de toute façon, probablement, pas besoin au niveau pratique le jour d'examen, ok ? À l'exception, peut-être des plus centraux.

notes

résumé

- Théorème du moment cinétique : en  $P$

$$\sum M_P^{\text{ext}} = \dot{L}_P + V_P \times M V_G \quad (12.31)$$

- Théorème du moment cinétique : (12.31) point  $P \equiv G$

(12.32)

- Roulement sans glissement : la vitesse du point de contact est nulle

(12.33)

- Théorème du moment cinétique : (12.31) et (12.33) point  $P \equiv C$

(12.34)

Ce dont vous allez avoir besoin, par contre, c'est de disposer du théorème du moment cinétique évalué soit au sond de base, soit au niveau du point de contact. C'est pour ça qu'on a dû faire le développement théorique qu'on a fait maintenant, d'accord ? Dans le théorème de transfert, apparaît la dérivé temporelle. Dans le théorème du moment cinétique, pardon, apparaît la dérivé temporelle du moment cinétique évalué par rapport au point O pour commencer, d'accord ? Donc, L O, on l'a écrit en termes de LP. C'était le premier théorème de transfert. On va donc dériver cette relation par rapport au temps, ok ? On aura la dérivé temporelle du moment cinétique évalué à l'origine, qui va être la dérivé temporelle du vecteur position du point P qui appartient au solide indéformable, produit vectoriel avec MVG, plus le produit vectoriel de la position du point P avec M fois la dérivé temporelle de la vitesse du sond de base. La dérivé de ce terme revient à dérivé les deux parties, ok ? Avec M qui est constant. Et puis, nous reste une dernière contribution, qui est la dérivé temporelle du moment cinétique évalué au point P. Maintenant, le théorème du moment cinétique évalué à l'origine nous dit que la dérivé temporelle du moment cinétique, c'est la somme des moments de force extérieure. Donc, on l'écrit, tout simplement. La somme des moments de force extérieure va donc être égale. A, la dérivé temporelle de la position du point P, qui est la vitesse du point P, dont on prend le produit vectoriel avec la masse et la vitesse du sond de masse. On aura ensuite la position du point P, produit vectoriel avec la masse, fois la dérivé temporelle de la vitesse du sond de masse, qui est l'accélération du sond de masse, ok ? Et il va nous rester un dernier terme, qui est la dérivé temporelle du

notes

résumé

77m 54s



- Théorème du moment cinétique : en  $P$

$$\sum M_P^{\text{ext}} = \dot{L}_P + \mathbf{V}_P \times M \mathbf{V}_G \quad (12.31)$$

- Théorème du moment cinétique : (12.31) point  $P \equiv G$

(12.32)

- Roulement sans glissement : la vitesse du point de contact est nulle

(12.33)

- Théorème du moment cinétique : (12.31) et (12.33) point  $P \equiv C$

(12.34)

moment cinétique évalué en  $P$ . Oui, mais voilà, on a un théorème de transfert pour les moments de force qu'on va appliquer entre l'original point  $P$ , d'accord ? Le voilà. Je le réécris simplement. Si on les compare, il est clair pour tout le monde que les membres de gauche sont égaux, donc les membres de droite aussi. Dans les membres de droite, on a deux fois le même terme qui va simplifier. Ce qui va nous permettre d'identifier la somme des moments de force extérieure évalués au point  $P$  quels qu'ils soient du solide indéformable aux deux termes qui sont ici, et ça, c'est le théorème du moment cinétique évalué en un point quelconque du solide indéformable. C'est le cas général. Donc, la somme des moments de force extérieure évalués en  $P$ , c'est la dérivée temporelle du moment cinétique évalué en  $P$ , plus le produit vectoriel, du vecteur position du point  $P$ , avec la masse qui multiplie la vitesse du centre de masse, d'accord ? Ça, c'est le cas général. Alors, ce cas général, on va rapidement l'appliquer en simplifiant.

notes

résumé

équations d'Euler

EPFL

ie et équations d'Euler

inertie

d'inertie et axes principaux d'inertie

d'Euler

cinématique et dynamique du solide indéformable

25 / 38

12.3 Tenseur d'inertie et

• Quantité de mouvement

• Moment cinétique : sol

où  $I_G$  est une application dans une base donnée (i.e. vecteur vitesse angulaire

1 Centre

$P$  est

car la

2 Solide

$L_G$  n'e

car l'in

Dr. Sylvain Bréchet

12

Quels sont les points qui nous intéressent ? Le sond de masse  $G$ , elle pointe contact entre le solide indéformable et la surface sur laquelle celui-ci roule sans visser. Prenons d'abord le sond de masse. Si  $P$  égale  $G$ , vous avez un  $G$  ici, un  $G$  là et un  $G$  là. Prenez le dernier terme. Le produit vectoriel de  $VG$  avec  $MVG$ , c'est le produit vectoriel de deux termes collinaires. Donc, ça disparaît. OK ? Ce qui signifie que la somme des moments de force extérieure évalué en  $G$ , c'est tout simplement la dérivé temporelle du moment cinétique évalué en  $G$ . On aurait pu, disons, le deviner intuitivement, ça aurait été correct, mais il faut le démontrer. C'est ce qu'on a fait. D'accord ? Maintenant, si on prend le cas du roulement sans glissement, on prend le point  $C$ , on remplace donc  $P$  par  $C$ . Qu'est-ce qu'on sait sur le roulement sans glissement ? La vitesse du point de contact est nulle, ce terme est nulle, donc le dernier terme est nulle. OK ? Et donc, dans le cas particulier, où on a un roulement sans glissement et donc la vitesse du point de contact est nulle, dans ce cas et dans ce cas seulement, on peut alors écrire que le théorème dimens siéthique, à la forme suivante, la somme des moments de force extérieure évaluancée, c'est la dérivé temporelle du moment siéthique évaluancée. Et ça, ça peut être très, très utile dans la pratique pour séparer un certain nombre de calculs lorsqu'on a le pivotement d'un objet autour du point de contact. On pourra appliquer uniquement le théorème dimens siéthique bien choisi, plutôt que d'appliquer conjointement le théorème du centre de masse, et le théorème dimens siéthique à l'origine. Je vous donnerai un exemple de ceci cet après-midi. Alors, maintenant, le programme du reste du cours jusqu'à midi, c'est de décortiquer toute l'information contenue là-dedans. Ce théorème du moment

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

résumé

80m 40s



## Cinématique et équations d'Euler

Inertie  
d'inertie et axes principaux d'inertie  
d'Euler

### • Quantité de mouvement

### • Moment cinétique : solide

où  $I_G$  est une application  
dans une base donnée (i.e.  
vecteur vitesse angulaire

### 1 Centre

$P$  est

car la



### 2 Solide

$L_G$  n'est

car l'in

siéthique, évalué par rapport au centre de masse, décrit le mouvement de rotation propre du solide indéformable, et c'est celui-ci qui nous intéresse. Mais, il y a un problème, c'est ce qui rend la dynamique du solide indéformable intéressante et compliquée. Le problème, c'est le suivant.

## notes

## résumé

- Quantité de mouvement : solide indéformable

$$\bar{P} = M \bar{V}_G \quad (12.35)$$

- Moment cinétique : solide indéformable évalué en  $G$

(12.36)

où  $I_G$  est une application linéaire appelée tenseur d'inertie représentée dans une base donnée (i.e. un repère) par une matrice  $3 \times 3$  qui envoie le vecteur vitesse angulaire  $\Omega$  sur le vecteur moment cinétique  $L_G$ .

- 1 Centre de masse : symétrie de rotation (point)

$P$  est toujours colinéaire à  $V_G$

car la masse  $M$  est un scalaire



- 2 Solide indéformable : pas de symétrie de rotation

$L_G$  n'est pas toujours colinéaire à  $\Omega$

car l'inertie  $I_G$  est une application linéaire

Si vous prenez la quantité de mouvement du solide indéformable, c'est le produit de la masse fois la vitesse du centre de masse. C'est-à-dire qu'on a une relation phénoménologique qui lit la grandeur intensive, qui est la vitesse du centre de masse, à la grandeur extensive, qui est la quantité de mouvement. D'accord ?

notes

résumé

82m 54s



- **Moment cinétique** : théorème de transfert (12.19) donne (12.37)

- **Vitesses** : points  $G$  et  $P_\alpha$  du solide indéformable (12.7)

(12.38)

- **Moment cinétique** : évalué en  $G$  (12.38) dans (12.37)

(12.39)

- **Identité cinématique** : où  $\mathbf{r}'_\alpha = G\mathbf{P}_\alpha$

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} G\mathbf{P}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \mathbf{r}'_{\alpha} = \mathbf{0}$$

(11.70)

- **Moment cinétique** : évalué en  $G$  (11.70) dans (12.39)

(12.40)

Ces grandeurs, on les connaît pour la dynamique en rotation. C'est quoi ? La grandeur extensive, c'est le moment cinétique évalué au centre de masse. La grandeur intensive, c'est le vecteur vitesse angulaire  $\omega$ . On aimerait bien multiplier  $\omega$  par une grandeur scalaire et trouver  $I\omega$ . C'est pas possible, malheureusement, dans le cas général. Pourquoi ? Quand on décrit le mouvement du centre de masse, le centre de masse, c'est un point. Il est clair pour tout le monde que si on fait une rotation dans les trois directions d'espace autour d'un point, c'est absolument symétrique. Ce qui fait que les vecteurs vitesse et son image, le vecteur quantité de mouvement, doivent forcément être collinaires, parce qu'on a un point pour le centre de masse. En revanche, si je prends un solide indéformable, le faire tourner autour de son axe de symétrie, le faire tourner autour d'un autre axe, ou autour du troisième, dans le cas général, c'est pas du tout symétrique. On perd la symétrie, parce qu'un solide indéformable n'a pas une symétrie de rotation dans les trois directions d'espace, ce qui signifie concrètement que le vecteur moment cinétique ne sera pas collinaire au vecteur vitesse angulaire. Et donc, on va se retrouver avec une grandeur qui est ici, un  $I\omega$ , qui n'est pas un scalaire. C'est une application linéaire qui envoie le vecteur vitesse angulaire  $\omega$  sur le vecteur moment cinétique. C'est application linéaire. Comment est-ce qu'on va la décrire en termes de notation ? Eh bien, on va introduire, comme c'est un objet dimension 2, une flèche double vers la gauche et vers la droite. D'accord ? C'est une application linéaire qui est en fait un tenseur. D'accord ? Alors, tout l'objectif de ce qui va suivre prochainement, c'est de déterminer la structure de ce tenseur, et c'est là que l'algèbre linéaire va venir à notre aide. D'accord ? On va faire de l'algèbre linéaire.

notes

résumé

83m 13s



- **Moment cinétique** : théorème de transfert (12.19) donne (12.37)

$$\vec{L}_G = \vec{L}_O - \vec{R}_G \times \vec{P} = \sum_{\alpha} (\vec{OP}_{\alpha} - \vec{OG}) \times m_{\alpha} \vec{V}_{\alpha} = \quad$$

- **Vitesses** : points  $G$  et  $P_{\alpha}$  du solide indéformable (12.7)

(12.38)

- **Moment cinétique** : évalué en  $G$  (12.38) dans (12.37)

(12.39)

- **Identité cinématique** : où  $\vec{r}'_{\alpha} = G\vec{P}_{\alpha}$

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} G\vec{P}_{\alpha} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} = \vec{0}$$

(11.70)

- **Moment cinétique** : évalué en  $G$  (11.70) dans (12.39)

(12.40)

Bon, la première étape, évidemment, c'est d'identifier le moment syéthique évalué par rapport au centre de masse. Alors, on prend le théorème de transfert qui est très utile, qui nous dit que c'est le moment syéthique évalué à l'origine, moins le produit vectoriel du vecteur position du centre de masse avec la quantité de mouvement total. D'accord ? Alors, maintenant, la quantité de mouvement total, c'est la somme sur les points matériels du produit des masses, des points matériels, pour leur vitesse. D'accord ? Ensuite, dans la structure de  $\vec{L}_O$ , on se retrouve aussi avec un produit vectoriel qui fait apparaître des  $\vec{MA}$  fois des  $\vec{VA}$ . Et donc, si on décortique tout ceci, on peut l'écrire comme la somme sur  $\alpha$ , de  $\vec{OP}_{\alpha}$  moins  $\vec{OG}$ , produit vectoriel avec  $\vec{MA}_{\alpha}$  fois  $\vec{VA}_{\alpha}$ . Et donc,  $\vec{OP}_{\alpha}$  moins  $\vec{OG}$ , c'est  $\vec{GO}$  plus  $\vec{OP}_{\alpha}$ , c'est donc la somme sur  $\alpha$ ,

notes

résumé

85m 10s



- Moment cinétique : évalué en  $G$

$$L_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} G P_{\alpha} \times (\Omega \times G P_{\alpha}) \quad (12.40)$$

- Identité vectorielle :

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c) b - (a \cdot b) c \quad (1.44)$$

- Identité vectorielle : où  $a = c = G P_{\alpha}$  et  $b = \Omega$

$$(12.41)$$

- Moment cinétique : évalué en  $G$  (12.41) dans (12.40)

$$(12.42)$$

- Vitesse angulaire : repère relatif  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$  attaché au solide

$$(12.43)$$

des vecteurs  $GP_{\alpha}$ . Donc, c'est les vecteurs positions relatives des points matériels  $\alpha$  par rapport au centre de masse. D'accord ? Donc, on a une structure de vectoriel avec le produit de la masse fois la vitesse des points matériels  $\alpha$ . Clairement, quand on décrit un mouvement de rotation par rapport au centre de masse, ce qui nous intéresse, c'est quoi ? C'est la position relative des points matériels par rapport au centre de masse, d'une part. Puis surtout, c'est la vitesse relative. Or, là, on a la vitesse absolue. Qu'est-ce qu'on a envie de faire ? D'utiliser une relation qu'on a établie entre les vitesses de deux points d'un solide indéformable, en prenant, comme premier point, le point matériel  $\alpha$ , et comme deuxième point, le centre de masse. On peut alors écrire que la vitesse du point matériel  $\alpha$ , la vitesse absolue,  $V_{\alpha}$ , c'est la vitesse du centre de masse  $V_G$ , plus le produit vectoriel de  $\Omega$  avec le vecteur issu de  $G$  qui pointe sur  $P_{\alpha}$ , qui est le vecteur  $GP_{\alpha}$ . Et on effectue la substitution. On trouve alors que le moment cinétique évalué en  $G$ , c'est la somme sur  $\alpha$  de  $GP_{\alpha}$ , produit vectoriel avec  $V_{\alpha}$ , qui multiplie  $V_{\alpha}$  qu'on peut écrire comme  $V_G$ , plus le produit vectoriel de  $\Omega$  avec  $GP_{\alpha}$ . Bon. On peut développer ceci. On aura d'une part la somme sur  $\alpha$ , des  $M_{\alpha} GP_{\alpha}$ , produit vectoriel avec  $V_G$ . Plus la somme sur  $\alpha$ , des  $M_{\alpha} GP_{\alpha}$ , produit vectoriel avec le vecteur obtenu par produit vectoriel de  $\Omega$  et de  $GP_{\alpha}$ . Oui, c'est assez compliqué. Alors, maintenant, si on prend le premier terme qui est ici,  $GP_{\alpha}$ , c'est quoi ? C'est la position relative du point matériel  $\alpha$ . On a démontré, la semaine passée, c'était la première identité vectorielle de la cinématique, que la somme sur

notes

résumé

86m 5s



- Moment cinétique : évalué en  $G$

$$L_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} GP_{\alpha} \times (\Omega \times GP_{\alpha}) \quad (12.40)$$

- Identité vectorielle :

$$a \times (b \times c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c \quad (1.44)$$

- Identité vectorielle : où  $a = c = GP_{\alpha}$  et  $b = \Omega$

$$(12.41)$$

- Moment cinétique : évalué en  $G$  (12.41) dans (12.40)

$$(12.42)$$

- Vitesse angulaire : repère relatif  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$  attaché au solide

$$(12.43)$$

alpha des  $M_{\alpha}$  et  $R_{\alpha}$  est égale à zéro. Donc, ce terme-là est nul. Le moment cinétique évalué en  $G$  peut s'écrire comme la somme sur  $\alpha$  des  $M_{\alpha}$  fois le produit vectoriel de  $GP_{\alpha}$  avec le vecteur obtenu par produit vectoriel de  $\Omega$  et de  $GP_{\alpha}$ . Alors, nous, on veut une application linéaire qui envoie  $\Omega$  sur  $L_G$ .  $\Omega$  se cache ici. On aimerait l'extraire. Qu'est-ce qu'on va faire ? On va utiliser l'identité vectorielle du produit vectoriel, l'un produit vectoriel, on l'est exprimé en termes de produit scalaire et ça va nous faire avancer un tout petit peu. Mais ce ne sera pas encore le fin mot de l'histoire. Après, il ne faut pas qu'on fasse vraiment, proprement parler de l'algèbre linéaire. Donc, on va prendre la pose et après la pose, on fera d'algèbre linéaire pour trouver le tenseur d'inertie et surtout pour l'exprimer dans une base où la matrice qui le représente est diagonale.

notes

résumé

- **Moment cinétique** : évalué en  $G$

$$L_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( G P_{\alpha}^2 \Omega - (G P_{\alpha} \cdot \Omega) G P_{\alpha} \right) \quad (12.42)$$

- **Moment cinétique** : composante  $L_{G,i} = \hat{y}_i \cdot L_G$  où  $i = 1, 2, 3$

$$(12.44)$$

- **Moment cinétique** : image du vecteur vitesse angulaire  $\Omega$  par l'application linéaire tenseur d'inertie  $I_G$

$$(12.45)$$

Voilà. Si vous êtes bien assis ou que vous serez bien assis, attachez vos ceintures, on va décoller. Ça ne va pas être simple. Mais j'ai appris quelque chose d'intéressant pendant la pose. Apparemment, vous avez vu le produit temps sorriel cette semaine. Alors, vous allez le revoir cette semaine plus spécifiquement dans quelques minutes. D'accord ? Alors, le moment signétique du solide indéformable évalué par rapport au centre de masse, on l'a déterminé juste avant la pose. Ce qu'on veut faire maintenant, c'est exprimer le produit vectoriel de trois vecteurs avec un double produit vectoriel en réalité en termes de produits scalaires grâce à l'identité vectorielle qu'on avait introduite et déterminée et calculée au chapitre 1. D'accord ? Si vous regardez la ligne du dessus, vous voyez tout de suite que le vecteur A, le vecteur C, ce sont les mêmes. C'est le vecteur GP alpha. Et le vecteur B, c'est le vecteur omega. Donc, l'identité vectorielle est la suivante. Le produit vectoriel de GP alpha avec le produit vectoriel de omega et de GP alpha, c'est le produit scalaire de GP alpha avec lui-même, qui multiplie le vecteur omega. Moins le produit scalaire du vecteur GP alpha avec le vecteur omega, le toutefois le vecteur GP alpha. Bon, très bien. Donc, maintenant, notre moment signétique, LG, on va le remettre un peu en forme. C'est la somme sur alpha des M alpha, qui multiplie le vecteur GP alpha au carré, foil vector omega. Moins le produit scalaire du vecteur GP alpha avec le vecteur omega, le toutefois le vecteur GP alpha. Et là, ça commence à ressembler à ce qu'on aimerait, mais on n'y est pas encore tout à fait. D'accord ? Parce que si le deuxième termite C était nul, ça serait sympathique, puisqu'on aurait effectivement une proportionnalité entre le moment signétique, L vector vitesse angulaire, la réalité n'est pas aussi simple que ça. Le fait que

notes

résumé

89m 4s



- **Moment cinétique** : évalué en  $G$

$$L_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( G P_{\alpha}^2 \Omega - (G P_{\alpha} \cdot \Omega) G P_{\alpha} \right) \quad (12.42)$$

- **Moment cinétique** : composante  $L_{G,i} = \hat{y}_i \cdot L_G$  où  $i = 1, 2, 3$

$$(12.44)$$

- **Moment cinétique** : image du vecteur vitesse angulaire  $\Omega$  par l'application linéaire tenseur d'inertie  $I_G$

$$(12.45)$$

le solide indéformable soit pas symétrique pour une rotation dans les trois directions d'espace, veut dire que le terme qui est ici est non nul. D'accord ? Alors, maintenant, il faudra, à partir de là, extraire une structure d'application linéaire en faisant intervenir un produit tensoriel. Mais pour l'instant, ce qu'on va commencer par faire, et on est obligé de le faire, c'est d'exprimer le vecteur vitesse angulaire  $\Omega$  en fonction des composantes, qui sont les  $\Omega_i$ , fois les vecteurs unitaires du repère relatif, qui sont les  $\hat{y}_i$ . Et puis, les  $\Omega_i$ , on peut les écrire comme étant le produit scalaire de  $\Omega$  avec les  $\hat{y}_i$ . Mais toutefois,  $\hat{y}_i$ . D'accord ? C'est juste une écriture, mais qui va être utile dans quelques instants. Pour découvrir la structure d'application linéaire,

notes

résumé

- **Moment cinétique** : évalué en  $G$

$$L_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( G P_{\alpha}^2 \Omega - (G P_{\alpha} \cdot \Omega) G P_{\alpha} \right) \quad (12.42)$$

- **Moment cinétique** : composante  $L_{G,i} = \hat{y}_i \cdot L_G$  où  $i = 1, 2, 3$

$$\hat{y}_i \cdot \bar{L}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \bar{G P}_{\alpha}^L (\hat{y}_i \cdot \bar{\Omega}) \right) \quad (12.44)$$

- **Moment cinétique** : image du vecteur vitesse angulaire  $\Omega$  par l'application linéaire tenseur d'inertie  $I_G$

(12.45)

mais pour le faire de manière intrinsèque, on va quand même être obligé de faire intervenir des composantes, mais on va le faire à l'aide de produits scalaires. Donc, si on prend la  $i$ -composante du vecteur colonne, moment cinétique  $L_G$ , on prend le produit scalaire du vecteur unitaire, ligne  $y_i$  chapeaux avec le vecteur colonne  $L_G$ . D'accord ? Ça revient à faire le produit matriciel de ces vecteurs exprimés dans le repère, le premier étant un vecteur qui a 2, 0 et 1, 1. D'accord ? Bon, donc, on prend le produit scalaire du vecteur  $y_i$  chapeaux avec le vecteur  $L_G$ . On a un vecteur ligne ici, un vecteur colonne là. On connaît  $L_G$ . On va donc écrire ça ici comme la somme sur  $\alpha$  des  $m_{\alpha}$  qui multiplient  $g p_{\alpha}$  au carré, foire-quoi ? Faut être produit scalaire de  $y_i$  chapeaux avec  $\Omega$ .

notes

résumé

92m 33s



- Tenseur d'inertie : application linéaire évaluée en  $G$

$$\overline{I}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\overline{G P_{\alpha}}^2 \mathbf{1} - \overline{G P_{\alpha}} \otimes \overline{G P_{\alpha}}) \quad (12.46)$$

- ① Application linéaire :  $GP_{\alpha}^2 \mathbf{1}$  représentée par la matrice  $3 \times 3$  diagonale de composantes  $\sum_{k=1}^3 GP_{\alpha,k}^2 \delta_{ij}$  dans la base  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$
- ② Application linéaire :  $GP_{\alpha} \otimes GP_{\alpha}$  représentée par la matrice  $3 \times 3$  symétrique de composantes  $GP_{\alpha,i} GP_{\alpha,j}$  dans la base  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$
- Moment cinétique : vecteur de composante  $L_{G,i}$  où  $i = 1, 2, 3$  dans la base  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$

(12.47)

- Tenseur d'inertie : matrice de composantes  $I_{G,ij}$  où  $i, j = 1, 2, 3$  dans la base  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$

(12.48)

Moins, le produit scalaire de  $y_i$  chapeaux avec  $gp\alpha$ , où ici  $y_i$  chapeaux est un vecteur ligne,  $gp\alpha$  est un vecteur colonne, et ensuite, on a le produit scalaire du vecteur ligne  $gp\alpha$  avec le vecteur colonne  $\omega$ . Vous allez voir pourquoi je parle de ligne et de colonne dans quelques instants. Maintenant, on a montré sur le transparent précédent que  $\omega$ , vous pouvez s'écrire comme la somme sur  $j$  égal à 1 à 3, du produit scalaire de  $\omega$  avec le  $y_i$  chapeaux, foie-la  $y_i$  chapeaux. Alors, on va utiliser ce résultat maintenant. D'accord ? Donc, on va récrire  $\omega$  de cette manière. On va mettre en évidence la somme sur les indices  $j$ . Et on va placer tout à droite les composantes qui sont le produit scalaire de  $\omega$  avec les  $y_j$ . Ok ? Et donc, on aura la somme sur  $j$  égal à 1 à 3, de la somme sur  $\alpha$ , des  $m\alpha$ , on a  $gp\alpha$  au carré, foie-le produit scalaire de  $y_i$  chapeaux avec  $y_i$  chapeaux, moins le produit scalaire de  $y_i$  avec  $gp\alpha$ , foie-le produit scalaire de  $gp\alpha$  avec  $y_j$  chapeaux, et il ne faut pas oublier de multiplier par les composantes de  $\omega$ , qui sera le produit scalaire de  $\omega$  avec les  $y_j$  chapeaux. C'est un peu compliqué, d'accord ? Mais ça permet de voir quoi ? Eh bien, quand on a des produits scalaires, on multiplie un vecteur ligne par un vecteur colonne. D'accord ? Ça, c'est un vecteur ligne, ça, c'est un vecteur colonne. Ça, c'est un vecteur ligne, ça, c'est un vecteur colonne. D'accord ? Pour faire apparaître une structure d'application linéaire, vous voyez ici qu'on a des composantes  $y_i$ ,  $y_i$ . Pour faire apparaître la structure de l'application linéaire qui se cache là-dedans, ce qu'il faut faire, c'est mettre en évidence le produit scalaire de  $y_i$  chapeaux avec le reste. On va écrire comme une application linéaire qui agit sur les  $y_j$

notes

résumé

93m 29s



- Tenseur d'inertie : application linéaire évaluée en  $G$

$$\overline{I}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\overline{G P_{\alpha}}^2 \mathbf{1} - \overline{G P_{\alpha}} \otimes \overline{G P_{\alpha}}) \quad (12.46)$$

- ① Application linéaire :  $GP_{\alpha}^2 \mathbf{1}$  représentée par la matrice  $3 \times 3$  diagonale de composantes  $\sum_{k=1}^3 GP_{\alpha,k}^2 \delta_{ij}$  dans la base  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$
- ② Application linéaire :  $GP_{\alpha} \otimes GP_{\alpha}$  représentée par la matrice  $3 \times 3$  symétrique de composantes  $GP_{\alpha,i} GP_{\alpha,j}$  dans la base  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$
- Moment cinétique : vecteur de composante  $L_{G,i}$  où  $i = 1, 2, 3$  dans la base  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$

(12.47)

- Tenseur d'inertie : matrice de composantes  $I_{G,ij}$  où  $i, j = 1, 2, 3$  dans la base  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$

(12.48)

chapeaux. Et c'est là que c'est assez technique. Le produit scalaire de yi chapeaux, du vecteur ligne avec le vecteur colonne LG, on va donc l'écrire en mettant en évidence yi chapeaux. On aura un produit scalaire. On va se retrouver avec une somme sur j égale 1 à 3. De la somme sur alpha, des m alpha. Maintenant, on va prendre une somme, vous voyez, on va prendre cette longueur à peu près. Et on va placer tout à droite yj chapeaux. Alors, il y a une double parenthèse ici. Et on se retrouve avec le produit scalaire de omega avec yj chapeaux. Alors, maintenant, si on prend le terme qui est ici, vous voyez qu'on a placé tout à gauche yi chapeaux, tout à droite yj. Donc, on va se retrouver avec gp alpha au carré, fois une application linéaire qui est en fait l'application linéaire identité. On va noter comme un 1. Représenter dans toute base comme une matrice identité avec 3 1 sur la diagonale et un 0 en diagonale. Alors là où ça se course un peu, c'est quand on arrive ici. Regardons la structure. Ça, c'est un vecteur ligne, ça, c'est un vecteur colonne. Ça, c'est un vecteur ligne, ça, c'est un vecteur colonne. Donc, on a un vecteur colonne qui multiplie un vecteur ligne. Le produit matriciel d'un vecteur ligne avec un vecteur colonne, ça fait un scalaire d'après les règles du produit matriciel. Le produit matriciel d'un vecteur colonne avec un vecteur ligne, ça engendre une matrice. Une matrice qui est la représentation, dans une base, d'une application linéaire qui est en réalité ici, le produit tensoriel du vecteur colonne GP-alpha avec le vecteur ligne GP-alpha. Donc le produit tensoriel de deux vecteurs, c'est prendre un vecteur colonne, le multiplier par un vecteur ligne et engendre une matrice qui représente l'application linéaire en composante. Là, si vous voulez dire, ici, c'est quelque

notes

résumé

- Tenseur d'inertie : application linéaire évaluée en  $G$

$$\overline{I}_G = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\overline{G P_{\alpha}}^2 \mathbf{1} - \overline{G P_{\alpha}} \otimes \overline{G P_{\alpha}}) \quad (12.46)$$

- ① Application linéaire :  $GP_{\alpha}^2 \mathbf{1}$  représentée par la matrice  $3 \times 3$  diagonale de composantes  $\sum_{k=1}^3 GP_{\alpha,k}^2 \delta_{ij}$  dans la base  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$
- ② Application linéaire :  $GP_{\alpha} \otimes GP_{\alpha}$  représentée par la matrice  $3 \times 3$  symétrique de composantes  $GP_{\alpha,i} GP_{\alpha,j}$  dans la base  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$
- Moment cinétique : vecteur de composante  $L_{G,i}$  où  $i = 1, 2, 3$  dans la base  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$

(12.47)

- Tenseur d'inertie : matrice de composantes  $I_{G,ij}$  où  $i, j = 1, 2, 3$  dans la base  $(\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$

(12.48)

chose d'abstrait, si on veut bien. Donc, c'est représenté avec ce produit tensoriel. Donc maintenant, on tient en fait la structure du tensor d'inertie. On va récrire ça de manière légèrement différente. C'est donc le produit scalaire de YI chapeau avec la somme sur J égale 1 à 3, de l'objet mathématique qui est ici, qui est en fait une application linéaire qui est l'application linéaire tensor d'inertie évaluée au point G. Et puis on la fait agir sur YG chapeau. Et puis on multiplie ceci par des nombres qui sont le produit scalaire de omega avec les YG chapeau. Et donc là, on a multiplié termatère, mais une matrice avec un vecteur ligne. Et on a pris le produit scalaire d'un vecteur ligne avec un vecteur... Non, qu'est-ce que je disais ? C'est une matrice avec un vecteur colonne. Et on a le produit scalaire d'un vecteur ligne avec un vecteur colonne. Donc ce qu'on a essentiellement fait, c'est prendre la im composante du vecteur colonne obtenu en multipliant le tensor d'inertie YG qui agit sur le vecteur colonne vitesse angulaire. D'accord ? Voilà ce qu'on a fait. Et donc on a trouvé le tensor d'inertie. L'objet mathématique tensor d'inertie écrit de manière explicite sans référer à une base, YG, c'est la somme sur les points matériels du produit de leur masse, fois la distance relative au carré qui les sépare du centre de masse, qui multiplie l'application linéaire identité, moins l'application linéaire engendrée en prenant ces vecteurs positions relatives exprimés comme vecteurs colonnes et comme vecteurs lignes en en effectuant le produit matriciel. D'accord ? Qui se traduit concrètement par un produit tensoriel. Voilà le tensor d'inertie. Ok ? Alors maintenant, ça donne quoi dans une base ?

notes

résumé

- Tenseur d'inertie : matrice de composantes  $I_{G,ij}$  où  $i, j = 1, 2, 3$

$$I_{G,ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \sum_{k=1}^3 GP_{\alpha,k}^2 \delta_{ij} - GP_{\alpha,i} GP_{\alpha,j} \right) \quad (12.48)$$

- Tenseur d'inertie : composantes diagonales  $I_{G,ii}$  où  $i = 1, 2, 3$

①

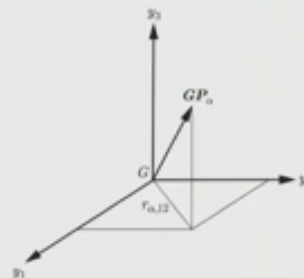
②

③

$r_{\alpha,23}$  = distance à l'axe  $Gy_1$

$r_{\alpha,31}$  = distance à l'axe  $Gy_2$

$r_{\alpha,12}$  = distance à l'axe  $Gy_3$



(12.49)

C'est ça qui est intéressant pour les calculs pratiques. D'accord ? Prenons l'application linéaire qui est ici. C'est un multiple de l'identité. D'accord ? Si vous écrivez en composante YG, une matrice d'identité, c'est le symbole de chronacaire delta YG. Que vous allez chaque fois multiplier par le carré du vecteur GP-alpha qu'on peut écrire en composante avec des composantes cartésiennes, par exemple, comme des GP-alpha 1, 2, 3 au carré. D'accord ? Donc voilà ce terme-là si en composante, l'application linéaire qui est ici. Ok ? Maintenant, si vous prenez un vecteur colonne GP-alpha, avec comme composante des indices de ligne, d'I, que vous prenez le vecteur ligne GP-alpha avec comme indice comme composante des colonnes, des J, vous pouvez multiplier GP-alpha I par GP-alpha J et vous générez les composantes YG de l'application linéaire qui se trouve ici. Donc, si on prend le moment signétique LG dans la base relative Y1 chapeau, Y2 chapeau, Y3 chapeau, qu'on prend la IM composante, on va pouvoir l'écrire comme la somme surgit égale 1 à 3, du produit des composantes du tenseur d'inertie YG représenté dans la base relative multiplié par les composantes du vecteur vitesse angulaire représenté dans cette même base. D'accord ? Vous avez donc la structure générale ici dans une base d'une application linéaire, l'application linéaire étant ici le tenseur d'inertie. OK ? Ça, c'est une structure que vous connaissez très bien, que vous avez vu à de multiples reprises en algèbres linéaires. D'accord ? Alors maintenant, notre application linéaire, notre tenseur d'inertie, représenté dans une base, si on change le base, on a d'autres nombres. D'accord ? On a une autre matrice. On peut donc écrire ces éléments de matrice explicitement. C'est la somme sur alpha des M alpha qui multiplie. La somme sur K égale 1 à 3 des GP alpha K au carré, donc les composantes au carré du vecteur position relative du point matériel alpha

notes

résumé

100m 1s



- Tenseur d'inertie : matrice de composantes  $I_{G,ij}$  où  $i, j = 1, 2, 3$

$$I_{G,ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \sum_{k=1}^3 GP_{\alpha,k}^2 \delta_{ij} - GP_{\alpha,i} GP_{\alpha,j} \right) \quad (12.48)$$

- Tenseur d'inertie : composantes diagonales  $I_{G,ii}$  où  $i = 1, 2, 3$

•

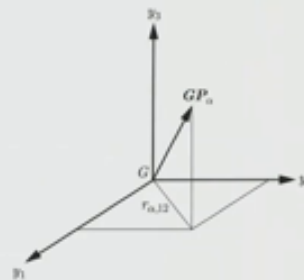
•

•

$r_{\alpha,23}$  = distance à l'axe  $Gy_1$

$r_{\alpha,31}$  = distance à l'axe  $Gy_2$

$r_{\alpha,12}$  = distance à l'axe  $Gy_3$



(12.49)

par rapport au centre de masse, multiplié ici par delta YG, c'est-à-dire qu'on va les retrouver comme composantes diagonales sur notre matrice. D'accord ? Puis on a une application linéaire qui est le produit tensoriel du vecteur colonne GP alpha avec le vecteur ligne GP alpha, qu'on peut donc représenter en composantes IJ comme GP alpha I fois GP alpha G. Alors il y a une première chose que vous pouvez faire. Tout de suite, qui répondra à une question qui avait été posée tout à l'heure durant la pause. D'accord ? Si vous prenez les indices IJ, puis que vous les permutiez. Regardez la structure, ça change rien du tout. Ça veut dire quoi ? Ça veut dire que dans n'importe quelle base, dans n'importe quel repère relatif lié au solide indéformable, le tenseur d'inertie est symétrique. On va plus loin ? Les composantes de ce tenseur sont les nombres L, clairement. D'accord ? Donc on a une matrice qui représente le tenseur d'inertie dans une base quelconque associée au solide indéformable, qui est une matrice symétrique 3 fois 3 à coefficient réelle. Et alors là, il y a un théorème qui nous dit que ça va être diagonalisable. Mais avant de rentrer là-dedans, il faut encore, au préalable, qu'on regarde un peu ce qui se cache

notes

résumé

- Tenseur d'inertie : matrice de composantes  $I_{G,ij}$  où  $i, j = 1, 2, 3$

$$I_{G,ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \sum_{k=1}^3 GP_{\alpha,k}^2 \delta_{ij} - GP_{\alpha,i} GP_{\alpha,j} \right) \quad (12.48)$$

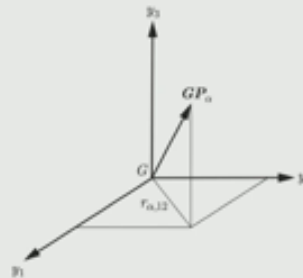
- Tenseur d'inertie : composantes diagonales  $I_{G,ii}$  où  $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \bullet I_{G,11} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (GP_{\alpha,2}^2 + GP_{\alpha,3}^2) \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,23}^2 \\ \bullet I_{G,22} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (GP_{\alpha,1}^2 + GP_{\alpha,3}^2) \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,31}^2 \\ \bullet I_{G,33} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (GP_{\alpha,1}^2 + GP_{\alpha,2}^2) \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,12}^2 \end{aligned} \quad (12.49)$$

$r_{\alpha,23}$  = distance à l'axe  $Gy_1$

$r_{\alpha,31}$  = distance à l'axe  $Gy_2$

$r_{\alpha,12}$  = distance à l'axe  $Gy_3$



derrière au sens physique, ce qui se cache derrière les composantes diagonales de ce tenseur d'inertie. D'accord ? Donc prenons-nous I, G, I, J, et on va regarder les valeurs pour lesquelles J est égal à I. D'accord ? On va regarder I, G, I, I, I, I, I, I, I, I, I, I, I, I, I. Alors prenons I, G, I, I. Qu'est-ce qu'on va avoir ? La somme sur alpha des  $m_{\alpha}$ . Et ensuite, si on regarde la structure qui est ici, I égale J, donc le symbole de chronique Hervé 1, d'accord ? Et on va se retrouver avec la somme des carré, des composantes du vecteur position relative du premier matériel alpha.  $GP_{\alpha,1}$  au carré, plus  $GP_{\alpha,2}$  au carré, plus  $GP_{\alpha,3}$  au carré. I égale 1, J égale 1. Donc le terme qui est ici va retrancher le carré de la première composante. D'accord ? Donc il ne restera plus que le carré des 2e et 3e composantes. On va donc se retrouver avec un  $GP_{\alpha,2}$  au carré, plus  $GP_{\alpha,3}$  au carré. Ça représente quoi ? Eh bien, si vous avez une somme de carré de composantes, vous définissez un cercle, d'accord ? Donc on est en train de définir une distance, puisque un cercle, c'est le lieu géométrique des points qui sont à une distance d'un point de vue, d'accord ? Donc ce qu'on est en train de calculer, c'est le carré de la distance qui sépare le point matériel alpha qui est ici, de quoi ? Du premier axe, l'axe  $Gy_1$ . D'accord ? Donc on a quoi ? On a la somme sur alpha,  $\sum m_{\alpha}$ , fois le carré de la distance qu'on va appeler  $r_{\alpha,23}$ , qui sépare le point matériel P alpha du premier axe. Bon, alors pour des raisons de symétrie, pour  $I_{G,2}$ , on a une structure similaire. Sauf

notes

résumé

103m 30s



- Tenseur d'inertie : matrice de composantes  $I_{G,ij}$  où  $i, j = 1, 2, 3$

$$I_{G,ij} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \left( \sum_{k=1}^3 GP_{\alpha,k}^2 \delta_{ij} - GP_{\alpha,i} GP_{\alpha,j} \right) \quad (12.48)$$

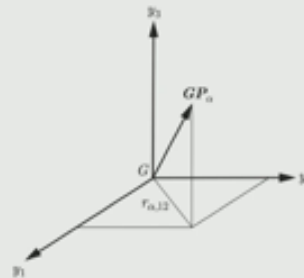
- Tenseur d'inertie : composantes diagonales  $I_{G,ii}$  où  $i = 1, 2, 3$

$$\begin{aligned} \bullet I_{G,11} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (GP_{\alpha,2}^2 + GP_{\alpha,3}^2) \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,23}^2 \\ \bullet I_{G,22} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (GP_{\alpha,1}^2 + GP_{\alpha,3}^2) \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,31}^2 \\ \bullet I_{G,33} &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} (GP_{\alpha,1}^2 + GP_{\alpha,2}^2) \equiv \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,12}^2 \end{aligned} \quad (12.49)$$

$r_{\alpha,23}$  = distance à l'axe  $Gy_1$

$r_{\alpha,31}$  = distance à l'axe  $Gy_2$

$r_{\alpha,12}$  = distance à l'axe  $Gy_3$



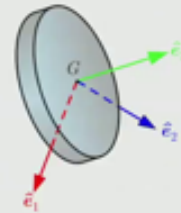
que maintenant, on va avoir le carré de GP alpha 3, plus le carré de GP alpha 1. C'est la deuxième composante qui disparaît. Donc là aussi, ce qu'on trouve, c'est la somme sur les points matériels du produit de leur masse, fois le carré de la distance qui sépare le point matériel du deuxième axe, l'axe  $Gy_2$ , d'accord ? Et puis pour terminer, on a  $I_{G3,3}$ , qui est la somme sur alpha,  $dm_{\alpha}$ , fois GP alpha 1 au carré, plus GP alpha 2 au carré,

notes

résumé

- **Tenseur d'inertie** :  $I_G$  est représenté par une matrice  $3 \times 3$  symétrique à coefficients réels  $I_{G,ij} = I_{G,ji}$
  - **Théorème d'analyse spectrale** : il existe une base orthonormée de vecteurs propres unitaires  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  liée au solide par rapport à laquelle le tenseur d'inertie est représenté par une matrice diagonale.
  - **Repère d'inertie** : repère direct  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$
  - **Axes principaux d'inertie** : axes  $Ge_1, Ge_2, Ge_3$
- Les axes principaux d'inertie d'un solide indéformable sont ses axes de symétrie
- **Moment cinétique** : repère d'inertie

$$\begin{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (12.50)$$



qui est la somme sur les points matériels du produit de leur masse, fois le carré de la distance qui sépare maintenant du troisième axe. D'accord ? Donc ces termes diagonaux, faut intervenir le produit des masses des points matériels fois le carré de la distance qui sépare d'un axe. Ca, c'est la clé. On va voir que c'est la structure qu'on retrouve aussi lorsqu'on a une matrice qui est diagonale. Alors justement,

notes

résumé

106m 2s



- **Moment cinétique** : en composantes dans le repère d'inertie

$$\begin{pmatrix} L_{G,1} \\ L_{G,2} \\ L_{G,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{G,1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G,2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \quad (12.50)$$

- **Moment cinétique** : écriture vectorielle de (12.50)

(12.51)

- **Moment cinétique** : écriture vectorielle développée

(12.52)

- **Moments d'inertie** : du solide par rapport à une rotation autour des axes principaux d'inertie  $Ge_1$ ,  $Ge_2$  et  $Ge_3$

(12.53)

où  $r_{\alpha,i}$  = distance du point matériel  $P_\alpha$  à l'axe  $Ge_i$  où  $i = 1, 2, 3$ .

le théorème d'analyse spectrale nous affirme que si on a une matrice qui est symétrique à coefficient réelle, alors forcément, elle est diagonalisable, ce qui veut dire qu'il existe une base dans laquelle le tenseur d'inertie est forcément diagonal. D'accord ? Cette base, on va lui donner un nom. C'est un repère lié au solide, un repère direct qu'on appelle le repère d'inertie, et les vecteurs unitaires, on va les écrire,  $E_1$  chapeau,  $E_2$  chapeau et  $E_3$  chapeau. D'accord ? Alors, si notre matrice est diagonale, ça veut dire qu'on a sur la diagonale trois nombres,  $I_{G1}$ ,  $I_{G2}$  et  $I_{G3}$ , et que tous les termes hors diagonaux sont nuls. Maintenant, on peut prendre le moment cinétique, l'exprimer dans cette base avec trois composantes,  $L_{G1}$ ,  $L_{G2}$ ,  $L_{G3}$ , et en fait, on fait pareil avec le vecteur vitesse angulaire, les composantes seront  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$ ,  $\Omega_3$ . D'accord ? Ça veut dire quoi ? Ça veut dire qu'on a trouvé, en fait, une structure avec des vecteurs propres. Les vecteurs propres, c'est justement les vecteurs du repère d'inertie, d'accord, qui sont envoyés sur un multiple de même. OK ? Et donc, on a des axes principaux d'inertie, qui sont les axes de vecteurs unitaires, eux, un chapeau, deux chapeaux et eux, trois chapeaux, attachés au centre de masj. D'accord ? Et ces axes principaux d'inertie, si on faisait purement des maths, faudrait qu'on les détermine en faisant un calcul sur la structure du déterminant d'applications linéaires, sous-straite du produit des valeurs propres, fois l'application linéaire identité. On peut faire mieux ici, parce qu'en réalité, si on a un objet symétrique, comme une sphère ou un cylindre, les axes principaux d'inertie, c'est ceux qui vont optimiser la symétrie, c'est donc les axes de symétrie. C'est la théorie des coupes cachées. D'accord ? Donc, en fait, si vous prenez un cylindre, il est clair pour tout le monde qu'il y a un axe de symétrie

notes

résumé

106m 37s



- **Moment cinétique** : en composantes dans le repère d'inertie

$$\begin{pmatrix} L_{G,1} \\ L_{G,2} \\ L_{G,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{G,1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G,2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \quad (12.50)$$

- **Moment cinétique** : écriture vectorielle de (12.50)

(12.51)

- **Moment cinétique** : écriture vectorielle développée

(12.52)

- **Moments d'inertie** : du solide par rapport à une rotation autour des axes principaux d'inertie  $Ge_1$ ,  $Ge_2$  et  $Ge_3$

(12.53)

où  $r_{\alpha,i}$  = distance du point matériel  $P_\alpha$  à l'axe  $Ge_i$  où  $i = 1, 2, 3$ .

qui est là. Donc, clairement, quand on a un repère d'inertie, on va orienter un vecteur le long de cet axe. En général, on prend le troisième, eux, trois chapeaux. Ce qui veut dire que, maintenant, dans le plan du cylindre, on aura deux autres vecteurs, d'accord ? Qui vont être orthogonaux. Et il faut que le pro-divéctorial et les deux premiers nous donnent le troisième, d'accord ? Donc, on n'a pas besoin de se dire où sont ces axes. On les voit tout de suite. C'est ça l'avantage, d'accord ? Ça va pas être un problème dans la pratique. Trouver les axes principaux d'inertie, vous allez trouver immédiatement, d'accord ? Et on a tout intérêt à travailler dans le repère d'inertie, parce que, justement, dans ce repère, eh bien, notre moment scientifique s'écrit en termes d'un tenseur d'inertie qui est diagonale. Alors, allons un peu plus loin, maintenant. Ce qu'on a écrit en composantes,

notes

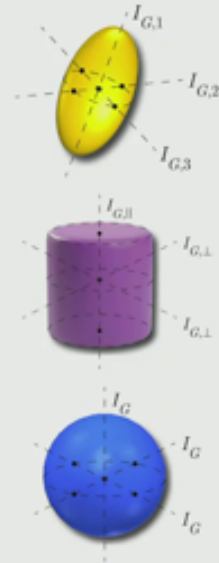
résumé

- Moments d'inertie : solides réguliers

- Ellipsoïde : pas d'axe de symétrie

- Cylindre : un axe de symétrie

- Sphère : infinité d'axes de symétrie



on peut l'écrire de manière vectorielle. Donc, le moment scientifique  $L_G$ , le vecteur moment scientifique, on peut l'écrire comme une combinaison linéaire des vecteurs unitaires du repère d'inertie avec les composantes du moment scientifique, les  $L_{G1}$ , il faut aller El chapeau, d'accord ? Alors, maintenant, ce qu'on sait, c'est que chaque composante du moment scientifique, c'est le produit de la composante diagonale du tenseur d'inertie multiplié, chaque fois par la composante du vecteur vitesse angulaire. On aura donc pour  $L_{G1}$ ,  $I_{11}$ , valant 1, 2 ou 3, le produit de  $I_{11}$ , fois  $\omega_1$ , fois El chapeau. Alors, c'est  $I_{G1}$ ,  $I_{G2}$ ,  $I_{G3}$ , c'est quoi concrètement ? C'est des valeurs propres de l'application linéaire tenseur d'inertie. Ces valeurs propres sont ce qu'on appelle des moments d'inertie, d'accord ? Alors, si on aimerait découvrir leur structure, on va le faire tout de suite. On va d'abord écrire que le moment scientifique  $L_G$ , c'est  $I_{G1}$ , premierment d'inertie, fois la composante du vecteur vitesse angulaire selon le premier axe principal d'inertie, qui est  $\omega_1$ , fois le vecteur unitaire le long de cet axe, qui est El chapeau. Et puis, on a la même structure pour la deuxième composante, la même, pour la troisième composante. D'accord ? Voilà la forme qu'il faudra d'aurénavant utiliser pour le solide indéformable, pour écrire le moment scientifique. Alors, si le moment d'inertie va le quoi ? Eh bien, si vous faites un changement de base, que vous passez d'un repère orthonormé quelconque, dont les vecteurs ne sont pas forcément orientés selon les axes de symétrie de l'objet, à un repère d'inertie où là, vous avez diagonalisé le tenseur d'inertie, vous gardez la même structure. Ce qui veut dire que les moments d'inertie vont être le produit des masses, des points matériels, multipliés par le carré de la distance, qui séparent ces points matériels de l'axe principal d'inertie, d'accord, autour duquel on veut décrire la rotation. Donc, le moment

## notes

## résumé

109m 37s

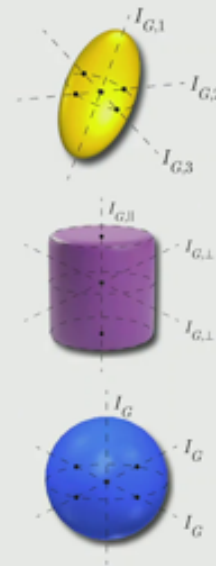


- Moments d'inertie : solides réguliers

- 1 Ellipsoïde : pas d'axe de symétrie

- 2 Cylindre : un axe de symétrie

- 3 Sphère : infinité d'axes de symétrie

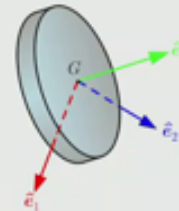


d'inertie  $I_{G1}$ , qui décrit la rotation du solide indéformable autour du premier axe principal d'inertie  $GE1$ , ça va être la somme sur les points matériels du produit de leur masse, fois le carré de la distance qui n'est séparé de cet axe qu'on va appeler  $R\text{-}\alpha_1\text{-Carré}$ . D'accord ? De la même manière, le moment d'inertie  $I_{G2}$ , du solide indéformable, autour, enfin, qui décrit la rotation du solide indéformable autour du deuxième axe principal d'inertie  $GE2$ , c'est la somme sur les points matériels du produit de leur masse, fois le carré de la distance qui n'est séparé de l'axe. Et finalement, le moment d'inertie  $I_{G3}$ , du solide indéformable pour une rotation autour du troisième axe principal d'inertie  $GE3$ , ça va être la somme sur les points matériels du produit de leur masse, fois le carré de la distance  $R3\text{-}\alpha$ , qui n'est séparé de l'axe principal d'inertie  $GE3$ . D'accord ? Et ce qu'on fera la semaine prochaine, c'est qu'on déterminera pour des objets réguliers la valeur de ces moments d'inertie. D'accord ? Et on les exploitera pratiquement pour faire des calculs. Ils sont essentiels. Alors...

notes

résumé

- **Tenseur d'inertie** :  $I_G$  est représenté par une matrice  $3 \times 3$  symétrique à coefficients réels  $I_{G,ij} = I_{G,ji}$
  - **Théorème d'analyse spectrale** : il existe une base orthonormée de vecteurs propres unitaires  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  liée au solide par rapport à laquelle le tenseur d'inertie est représenté par une matrice diagonale.
  - **Repère d'inertie** : repère direct  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$
  - **Axes principaux d'inertie** : axes  $Ge_1, Ge_2, Ge_3$
- Les axes principaux d'inertie d'un solide indéformable sont ses axes de symétrie
- **Moment cinétique** : repère d'inertie



$$\begin{pmatrix} L_{G,1} \\ L_{G,2} \\ L_{G,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{G,1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G,2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \quad (12.50)$$

Si on prend un solide régulier, prenons quelques exemples, prenons d'abord un ellipsoïde qui n'a aucun axe de symétrie. On peut imaginer une sorte de ballon de rugby qui est aplati. OK ? Ce qui veut dire que, contrairement à ce que l'image semble suggérer, si vous prenez les trois axes, ils ont des longueurs différentes. D'accord ? Dans ce cas-là, les moments d'inertie dû aux rotations autour des trois axes, d'accord, vont faire apparaître des distances différentes des points matériels aux axes de symétrie, et donc on aura des moments d'inertie qui vont tous être différents.  $I_{G1}$  sera différent de  $I_{G2}$ , qui est différent de  $I_{G3}$ , qui est différent de  $I_{G1}$ . D'accord ? Si maintenant on prend un cylindre ou qu'on prend une bouteille d'avant, on l'a fait tourner autour de l'axe de symétrie. Eh bien, on a justement un axe de symétrie, ce qui veut dire, si vous prenez cette bouteille, par exemple, j'ai un axe de symétrie qui est ici, avec un moment d'inertie donnée. Si maintenant je prends deux autres axes principaux d'inertie qui se retrouvent dans le plan coupe circulaire de la bouteille, si je la fais tourner autour d'un premier axe, ou autour du deuxième axe, c'est pareil. D'accord ? Les moments d'inertie sont les mêmes. Et donc, on va avoir des moments d'inertie selon les axes qui ne sont pas les axes de symétrie, qui vont être les mêmes pour les deux axes principaux d'inertie qui ne sont pas l'axe de symétrie. Donc  $I_{G2}$  va être égal à  $I_{G3}$ , qui va être, en fait, enfin, qu'on va appeler  $I_G$  perpendiculaire, puisqu'on est orthogonal à l'axe de symétrie. Et on va avoir  $I_{G1}$ , le long de l'axe de symétrie, qu'on va appeler  $I_G$  parallèle. Et en général, ça dépendra du cylindre, mais la plupart du temps,  $I_G$  parallèle sera différent de  $I_G$  perpendiculaire. On pourrait... Oui ? Sur la page 32, vous avez demandé

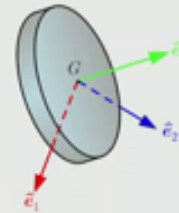
notes

résumé

113m 2s



- **Tenseur d'inertie** :  $I_G$  est représenté par une matrice  $3 \times 3$  symétrique à coefficients réels  $I_{G,ij} = I_{G,ji}$
  - **Théorème d'analyse spectrale** : il existe une base orthonormée de vecteurs propres unitaires  $\{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$  liée au solide par rapport à laquelle le tenseur d'inertie est représenté par une matrice diagonale.
  - **Repère d'inertie** : repère direct  $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$
  - **Axes principaux d'inertie** : axes  $Ge_1, Ge_2, Ge_3$
- Les axes principaux d'inertie d'un solide indéformable sont ses axes de symétrie
- **Moment cinétique** : repère d'inertie



$$\begin{pmatrix} \mathcal{L}_{G,1} \\ \mathcal{L}_{G,2} \\ \mathcal{L}_{G,3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{G,1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G,2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \quad (12.50)$$

le troisième axe. Oui.

notes

résumé

que : en composantes dans le repère d'inertie

$$\begin{pmatrix} I_{G,1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G,2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \quad (12.50)$$

que : écriture vectorielle de (12.50)

$$I_{G,i} \hat{e}_i = \sum_{j=1}^3 I_{G,ij} \Omega_j \hat{e}_j \quad (12.51)$$

que : écriture vectorielle développée

$$I_{G,1} \hat{e}_1 + I_{G,2} \Omega_2 \hat{e}_2 + I_{G,3} \Omega_3 \hat{e}_3 \quad (12.52)$$

rtie : du solide par rapport à une rotation autour des  
d'inertie  $Ge_1$ ,  $Ge_2$  et  $Ge_3$

$$r_{\alpha,1}^2; I_{G,2} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,2}^2; I_{G,3} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha,3}^2 \quad (12.53)$$

ce du point matériel  $P_{\alpha}$  à l'axe  $Ge_i$  où  $i = 1, 2, 3$ .

• Moments d'ine

① Ellipsoïde

$$I_{G,1} \neq$$

② Cylindre :

$$I_{G,1} =$$

$$I_{G,1} =$$

③ Sphère : in

Oui. Et ensuite, il y avait la symétrie, et là, on appelle l'inverse. C'est-à-dire que l'on a pris le premier axe comme étant hyperalèle ? Oui, mais ça dépend du cas de figure. Donc ça, c'est un choix de paramétrisation. On pourrait, effectivement, c'est vrai que, par rapport à l'objet qui est ici, on aurait pu prendre,

notes

résumé

115m 4s



- Moments d'inertie : solides réguliers

- Ellipsoïde : pas d'axe de symétrie

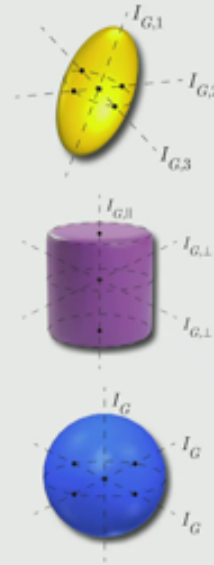
$$I_{G,1} \neq I_{G,2} \neq I_{G,3} \neq I_{G,1}$$

- Cylindre : un axe de symétrie

$$I_{G,2} = I_{G,3} \equiv I_{G\perp}$$

$$I_{G,1} = I_{G\parallel} \neq I_{G\perp}$$

- Sphère : infinité d'axes de symétrie



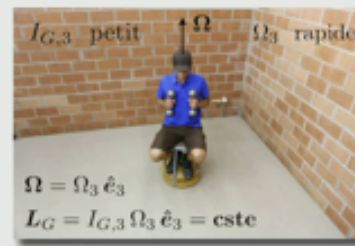
comme troisième axe, l'axe principal d'inertie,

notes

résumé

115m 25s





- La somme des moments de forces du poids  $P$  et de la réaction normale  $N$  évalués en  $G$  est nulle. Ainsi, le moment cinétique est conservé,

$$\sum M_G^{\text{ext}} = 0 \quad \text{ainsi} \quad L_G = I_{G,3} \Omega_3 \hat{e}_3 = \text{cste}$$

- En ramenant les haltères vers le corps, le moment d'inertie  $I_{G,3}$  diminue, ce qui augmente la vitesse angulaire  $\Omega_3$  afin de garder le moment cinétique  $L_G$  constant.
- En éloignant les haltères du corps, le moment d'inertie  $I_{G,3}$  augmente, ce qui diminue la vitesse angulaire  $\Omega_3$  afin de garder le moment cinétique  $L_G$  constant.

qui est l'axe symétrique d'objet. D'accord ? On aurait pu le faire. Mais ça, c'est simplement un dessin. C'est un commentaire légitime, on pourrait le faire, pour être complètement raccord par rapport à notre modélisation, mais c'est finalement un choix d'orienter le troisième axe principal d'inertie, le long d'axe symétrique. C'est en général ce qui est fait. D'accord ? Voilà. Donc les deux sont possibles, mais c'est vrai qu'on pourrait le faire. Si on prend une sphère, la sphère vous pouvez la faire tourner autour de n'importe quel axe qui passe par le sang de masse. Vous allez avoir le même comportement. D'accord ? Une sphère homogène, évidemment. Donc, les moments d'inertie, le long des trois axes,  $IG_1$ ,  $IG_2$  et  $IG_3$ , qui ont été même, on peut tout simplement les appeler  $IG$ . Pour une sphère. OK ? Voilà. Alors, revenons rapidement à une expérience de la semaine passée qu'on a fait tout à la fin du cours. Maintenant, on a tout ce qu'il faut pour la comprendre. D'accord ? C'était l'expérience des altères. Alors, sauf Férolde, la semaine passée, c'est Sarah qui était assis sur le tabouret qui est ici. D'accord ? Je lui donnais les altères, je les fais tourner. Elle a rapproché les altères près du corps. Qu'est-ce qui s'est passé ? Sa vitesse angulaire a augmenté.

notes

résumé

115m 26s



- Formules de Poisson : vecteurs unitaires du repère d'inertie

(12.54)

- Moment cinétique :

$$L_G = \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \Omega_i \hat{e}_i \quad (12.51)$$

- Solide indéformable : moments d'inertie constants

(12.55)

- Dérivée temporelle du moment cinétique : (12.51), (12.54) et (12.55)

i

(12.56)

Quand elle les a éloignées, sa vitesse angulaire a diminué. D'accord ? Si il nous reste un peu de temps, on la fera tout à la fin du cours. Donc, pour comprendre ce qui se passe ici, il faut appliquer le théorème du moment cinétique, au centre de masse. Alors, le centre de masse se trouve, disons, le long de la colonne vertébrale de Sarah. D'accord ? Et si on regarde le poids qui s'applique au niveau du centre de masse, vers le bas, d'accord ? Le moment de force lié au poids est évidemment nul. Si on prend la force de réaction normale exercée par le tabouret sur le corps de Sarah, eh bien, ce moment de force va aussi être nul puisque le vecteur force de réaction normale va se trouver sur le même axe que le centre de masse. D'accord ? Donc, la somme des moments de force extérieures est nul. Ce qui veut dire que le moment cinétique de Sarah évalué par rapport au centre de masse est constant. On avait qu'un mouvement de rotation autour de l'axe vertical, bien heureusement, puisque s'il y avait eu un autre mouvement de rotation, ça voudrait dire que Sarah était en train de tomber au sol, ce qui ne s'est heureusement pas passé, puisque elle a ramené gentiment les altères près du corps. D'accord ? Donc, le vecteur vitesse angulaire  $\omega$  est orienté selon l'axe principal d'inertie verticale, ce qui veut dire qu'il n'y a qu'une seule composante, non nul de  $\omega$  qui est  $\omega_3$ . Et donc, si on prend  $I_G$ , le seul terme non nul sera  $I_{G,3}$ , le moment d'inertie autour de l'axe verticale, multiplié par  $\omega_3$ , multiplié par le vecteur unitaire vertical d'inertie, qui est  $\hat{e}_3$  chapeau. D'accord ? Et c'est constant. Bon,  $\hat{e}_3$  chapeau, il est constant. Alors, maintenant, ce qu'on peut faire varier, c'est le moment d'inertie à la vitesse angulaire. Le

notes

résumé

116m 37s



- Formules de Poisson : vecteurs unitaires du repère d'inertie

(12.54)

- Moment cinétique :

$$L_G = \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \Omega_i \hat{e}_i$$

(12.51)

- Solide indéformable : moments d'inertie constants

(12.55)

- Dérivée temporelle du moment cinétique : (12.51), (12.54) et (12.55)

i

(12.56)

moment d'inertie, c'est, si on églie le moment d'inertie lié, disons, aux bras de Sarah, si c'est uniquement les altères pour simplifier, vous prenez les masses des deux altères qui se trouvent chacune à la même distance de l'axe de rotation, d'accord ? Et le moment d'inertie, ce sera être le produit des masses des altères, faut le carrer la distance qui les sépare de l'axe verticale. Et on multiplie par deux, puisqu'il y a deux altères. D'accord ? Maintenant, en ramenant les altères près du corps, le moment d'inertie diminue, comme le carrer la distance. D'accord ? Et donc, pour que le moment signifie reste constant, il faut nécessairement que la vitesse angulaire compense qu'elle augmente. Et vice-versa, lorsque... Elle a fini par s'arrêter dans son mouvement. Alors, est-ce que quelqu'un a envie de refaire l'exercice maintenant qu'on a compris ce qui se passe ? Il y a un ou une volontaire ? On le fait rapidement ? Ah ! Vous êtes à derrière ! Mais vous l'avez déjà fait la semaine passée. Est-ce que Luc, vous voulez le faire ? Allez, venez. Voilà, prenez place. Je vous donne des altères. Vous les écartez bien. On départ. Je vous fais tourner, mais pas trop vite quand même. Voilà. Maintenant, vous les ramenez près du corps, mais vous y allez gentiment. Vous voyez ? L'augmentation de la vitesse. Vous avez le temps. Vous avez le temps. Vous avez le temps. Vous avez le temps. Vous avez le temps. Vous avez le temps. Vous avez le temps. Vous voyez ? L'augmentation de la vitesse angulaire de  $\omega_3$  qui augmente. Maintenant, vous écartez les altères.  $I_{G3}$  diminue.  $I_{G3}$  augmente, pardon.  $\omega_3$  diminue. Et quand vous les ramenez près du corps, c'est le contraire. C'est le moment d'inertie qui diminue. Et donc, la vitesse angulaire qui augmente, de telle

notes

résumé

- **Formules de Poisson** : vecteurs unitaires du repère d'inertie

(12.54)

- **Moment cinétique** :

$$L_G = \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \Omega_i \hat{e}_i$$

(12.51)

- **Solide indéformable** : moments d'inertie constants

(12.55)

- **Dérivée temporelle du moment cinétique** : (12.51), (12.54) et (12.55)

i

(12.56)

sorte que la composante verticale du moment asiatique, reste constante. On peut l'applaudir ? Merci Luc. Merci. Merci. Voilà. Ok. Ce qu'on veut faire maintenant,

notes

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

résumé

.....

.....

.....

.....

.....

- Formules de Poisson : vecteurs unitaires du repère d'inertie

$$\dot{\hat{e}}_i = \vec{\Omega} \times \hat{e}_i \quad (12.54)$$

- Moment cinétique :

$$L_G = \sum_{i=1}^3 I_{G,ii} \Omega_i \hat{e}_i \quad (12.51)$$

- Solide indéformable : moments d'inertie constants

$$\dot{I}_{G,ii} = 0 \quad \forall i=1,2,3 \quad (12.55)$$

- Dérivée temporelle du moment cinétique : (12.51), (12.54) et (12.55)

$$\begin{aligned} \dot{L}_G &= \sum_{i=1}^3 I_{G,ii} \dot{\Omega}_i \hat{e}_i + \sum_{i=1}^3 I_{G,ii} \Omega_i \dot{\hat{e}}_i \\ &= \sum_{i=1}^3 I_{G,ii} \dot{\Omega}_i \hat{e}_i + \vec{\Omega} \times \left( \sum_{i=1}^3 I_{G,ii} \Omega_i \hat{e}_i \right) \end{aligned} \quad (12.56)$$

c'est déterminer les équations de l'air, soit les équations du mouvement de rotation propre, évalué par rapport au centre de masse. On va prendre le théorème du moment asiatique qu'on va exprimer dans le repère d'inertie. C'est ça le but, d'accord ? Comme le disait Martin tout à l'heure, il faut faire attention, parce que si vous avez des vecteurs unitaires d'un repère reliant, si vous avez des vecteurs unitaires d'un repère relatif, qui peut être le repère d'inertie, qui se déplace au cours du temps, leur dérivé temporel est dans nul. Et donc, on va utiliser les formules de poisson pour identifier les dérivés temporels des vecteurs unitaires du repère d'inertie. On va les obtenir en prenant le produit vectoriel du vecteur vitesse angulaire omega avec ses mêmes vecteurs. D'accord ? Prenons maintenant notre moment asiatique. Dans le moment asiatique, on a une somme sur les composantes. Des moments d'inertie, il faut les composantes correspondantes du vecteur vitesse angulaire, il faut les vecteurs unitaires du repère d'inertie. On dérive ceci par rapport au temps. Seulement, contrairement à Luc, contrairement à Sarah, quand on a un solide indéformable, les bras ne sont pas rétractables. Donc, les distances sont fixes. Donc, les moments d'inertie sont constants pour un solide indéformable, sinon le solide serait déformable. D'accord ? Ce qui veut dire que la dérivé temporelle des moments d'inertie, des IGI, ces dérivé temporelles nul, quelle que soit le moment considéré. D'accord ? Donc, maintenant, la dérivé temporelle du moment asiatique, évalué par rapport au centre de masse, on va d'abord l'obtenir en dérivant les composantes du vecteur vitesse angulaire. On aura une somme sur i égale 1 à 3. Des IGI, foilé omega i point, foilé El chapeau. Et ensuite, ah tiens, il y a i qui n'a pas disparu, OK, foilassame de i égale 1, 1, 3, des IGI, omega i, il faut dériver aussi les vecteurs unitaires, pas besoin

notes

résumé

120m 11s



- Formules de Poisson : vecteurs unitaires du repère d'inertie

$$\dot{\hat{e}}_i = \bar{\Omega} \times \hat{e}_i \quad (12.54)$$

- Moment cinétique :

$$L_G = \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \Omega_i \hat{e}_i \quad (12.51)$$

- Solide indéformable : moments d'inertie constants

$$\dot{I}_{G,i} = 0 \quad \forall i=1,2,3 \quad (12.55)$$

- Dérivée temporelle du moment cinétique : (12.51), (12.54) et (12.55)

$$\begin{aligned} \dot{L}_G &= \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \dot{\Omega}_i \hat{e}_i + \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \Omega_i \dot{\hat{e}}_i \\ &= \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \dot{\Omega}_i \hat{e}_i + \bar{\Omega} \times \left( \sum_{i=1}^3 I_{G,i} \Omega_i \hat{e}_i \right) \end{aligned} \quad (12.56)$$

de dériver les moments diversifs, puisqu'ils sont constants. Bon, là, on utilise des formules de poisson pour exprimer ces dérivés temporels des vecteurs unitaires du repère d'inertie en termes de omega produit vectoriel avec El chapeau. Omega ne dépend pas de la somme sur I, on peut le mettre en évidence. Et donc, on se retrouve avec la somme sur I égale 1 à 3, des IGI, omega i point, foilé El chapeau. Plus, le produit vectoriel de omega avec la somme sur I égale 1 à 3, des IGI, omega i El chapeau. Or, ceci, c'est précisément le moment signétique.

notes

résumé

❶ Cas particulier : si  $\dot{\Omega}_1 = \dot{\Omega}_2 = \dot{\Omega}_3 = 0$

(12.57)

Précession du moment cinétique  $L_G$  autour de l'axe de rotation défini par le vecteur vitesse angulaire  $\Omega$ .

❷ Cas général :

$$\begin{aligned}\dot{L}_G &= I_{G,1} \dot{\Omega}_1 \hat{e}_1 + I_{G,2} \dot{\Omega}_2 \hat{e}_2 + I_{G,3} \dot{\Omega}_3 \hat{e}_3 + \Omega \times L_G \\ &= I_{G,1} \dot{\Omega}_1 \hat{e}_1 + I_{G,2} \dot{\Omega}_2 \hat{e}_2 + I_{G,3} \dot{\Omega}_3 \hat{e}_3 \\ &\quad \underbrace{(\Omega_1 \hat{e}_1 + \Omega_2 \hat{e}_2 + \Omega_3 \hat{e}_3)}_{=\Omega} \times \underbrace{(I_{G,1} \Omega_1 \hat{e}_1 + I_{G,2} \Omega_2 \hat{e}_2 + I_{G,3} \Omega_3 \hat{e}_3)}_{=L_G} \\ &= I_{G,1} \dot{\Omega}_1 \hat{e}_1 + I_{G,2} \dot{\Omega}_2 \hat{e}_2 + I_{G,3} \dot{\Omega}_3 \hat{e}_3 + (I_{G,3} - I_{G,2}) \Omega_3 \Omega_2 \hat{e}_1 \\ &\quad + (I_{G,1} - I_{G,3}) \Omega_1 \Omega_3 \hat{e}_2 + (I_{G,2} - I_{G,1}) \Omega_2 \Omega_1 \hat{e}_3\end{aligned}\quad (12.58)$$

❸ Somme des moments des forces extérieures : évalué en  $G$

(12.59)

Donc, on peut récrire cela comme la somme sur les indices de 1 à 3, du produit des moments d'inertie. Faut aller dériver temporels des composants du vector vitesse angulaire, foilé vecteurs unitaires du repère d'inertie. Et le dernier terme, c'est le produit vectoriel de omega avec LG. Et donc, pour un solide indéformable, omega n'est pas nécessairement collinère à LG et quand ils ne le sont pas, on a ce terme qui apparaît et ce terme est très intéressant. Ce terme a sauvé des millions de vies. D'accord ? Vous allez me dire comment ? Est-ce que les maths ou la physique peuvent sauver des vies ? Ben oui, ils peuvent sauver des vies parce qu'il y a une technologie qui peut en découler. Je vais vous expliquer ce qu'on peut en faire. Donc, dans le cas particulier,

notes

résumé

123m 8s



- Théorème du moment cinétique :

$$\sum M_G^{\text{ext}} = \dot{L}_G \quad (12.32)$$

- Equations d'Euler : (12.58) et (12.59) dans (12.32)

④ selon  $\hat{e}_1$  :

④ selon  $\hat{e}_2$  :

④ selon  $\hat{e}_3$  :

(12.60)

- Théorème du centre de masse :

$$\sum F^{\text{ext}} = \dot{P} = M \dot{V}_G \quad (12.15)$$

- Equations du mouvement :

④ selon  $\hat{e}_1$  :

④ selon  $\hat{e}_2$  :

④ selon  $\hat{e}_3$  :

(12.61)

où les composants du vector vitesse angulaire  $\omega$  sont constants dans le repère d'inertie, alors la dérivé temporelle de  $L_G$ , c'est le produit vectoriel de  $\omega$  avec  $L_G$ . Très bien. Prenez un  $\omega$  qui est vertical. Prenez un  $L_G$  qui est incliné. Prenez le produit vectoriel des deux. Qu'est-ce que vous avez ? Un vector horizontal. D'accord ? Donc, vous avez une rotation, vous avez une précession de  $L_G$  autour de  $\omega$  comme avec un cône. D'accord ? Si vous voulez, le vector  $L_G$  va balayer la surface du cône, dont l'axe correspond à  $\omega$  au cours du temps. D'accord ? Alors, ça a une application absolument extraordinaire puisqu'en réalité, quand on a défini le moment... Quand on a défini le théorème du moment cinétique, on l'a défini en termes de la dérivé temporelle de  $L_G$ , ce qui veut dire que  $L_G$  est défini à une constante près. C'est quoi cette constante ? Cette constante, c'est le moment cinétique intrinsèque, aussi appelé le spin. D'accord ? Et donc, si on fait du magnétisme, on décrit la précession du spin autour du vecteur vitesse angulaire de l'armor lié au champ magnétique. D'accord ? Alors, dans votre corps, vous avez des densités de tissu différentes avec des spins qu'on peut faire précesser grâce à un champ magnétique qui est appliqué. D'accord ? Et on peut ainsi faire une imagerie pour savoir quelle est la densité des tissus dans le corps humain sans avoir à faire d'opération. Ça s'appelle l'imagerie par résonance magnétique. Et c'est cette imagerie par résonance magnétique qui a sauvé des millions de vies. D'accord ? C'est directement tout droit tiré de la physique. OK ? En réalité, les équations qui sont derrière sont les mêmes équations que celles de la résonance qu'on avait établie au chapitre 7. On peut regarder la résonance magnétique, d'où IRM, dans le mot IRM, il y a imagerie. D'accord ? Il y a résonance

notes

résumé

123m 56s



- Théorème du moment cinétique :

$$\sum M_G^{\text{ext}} = \dot{L}_G \quad (12.32)$$

- Equations d'Euler : (12.58) et (12.59) dans (12.32)

1 selon  $\hat{e}_1$  :

2 selon  $\hat{e}_2$  :

3 selon  $\hat{e}_3$  :

(12.60)

- Théorème du centre de masse :

$$\sum F^{\text{ext}} = \dot{P} = M \dot{V}_G \quad (12.15)$$

- Equations du mouvement :

1 selon  $\hat{e}_1$  :

2 selon  $\hat{e}_2$  :

3 selon  $\hat{e}_3$  :

(12.61)

et il y a magnétique. D'accord ? Donc, c'est une superbe équation qui a une importance sans égal. D'accord ? Elle est encore étudiée abondamment aujourd'hui. Enfin, ses conséquences sont étudiées abondamment aujourd'hui. Bon. Alors, dans le cas général, je vous ai parlé des calculs parce que c'est un peu long et criant. Ce qu'on peut faire, c'est reprendre les trois termes qui sont non nul. Et ce produit vectoriel, on peut le développer dans le repère d'inertie, termes à termes. Et alors, on va se retrouver avec quelle structure, c'est celle-là qui est intéressante. On va se retrouver avec ces termes de précession qui font intervenir pour chaque vecteur unitaire du repère d'inertie, la différence entre les moments d'inertie liés aux autres axes multipliés par les composantes du vecteur vite et singulaires le long des autres axes. D'accord ? C'est hautement non linéaire et c'est extrêmement intéressant. D'accord ? Alors, pour obtenir les équations de l'air, on est à bout touchant. On va prendre la somme des moments de force extérieure évalués par rapport à G qu'on va exprimer dans le repère d'inertie. D'accord ? On va simplement l'écrire en composantes dans le repère d'inertie. Un dernier terme pour la troisième composante, MG3 extérieure le long de E3-SHAP. OK ? Donc on a les composantes de la dérivée temporelle de LG qui sont ici. On a les composantes de la somme des moments de force extérieure et il suffit de les identifier, d'accord ? Composantes à composantes, c'est-à-dire de projeter l'équation de l'air, enfin, de projeter le théorème du moment cinétique

notes

résumé

- Théorème du moment cinétique :

$$\sum M_G^{\text{ext}} = \dot{L}_G \quad (12.32)$$

- Equations d'Euler : (12.58) et (12.59) dans (12.32)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ selon } \hat{e}_1 : \sum M_{G,1}^{\text{ext}} &= I_{G,1} \dot{\Omega}_1 + (I_{G,3} - I_{G,2}) \Omega_2 \Omega_3 \\ \textcircled{2} \text{ selon } \hat{e}_2 : \sum M_{G,2}^{\text{ext}} &= I_{G,2} \dot{\Omega}_2 + (I_{G,1} - I_{G,3}) \Omega_1 \Omega_3 \\ \textcircled{3} \text{ selon } \hat{e}_3 : \sum M_{G,3}^{\text{ext}} &= I_{G,3} \dot{\Omega}_3 + (I_{G,2} - I_{G,1}) \Omega_1 \Omega_2 \end{aligned} \quad (12.60)$$

- Théorème du centre de masse :

$$\sum F^{\text{ext}} = \dot{P} = M \dot{V}_G \quad (12.15)$$

- Equations du mouvement :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ selon } \hat{e}_1 : \\ \textcircled{2} \text{ selon } \hat{e}_2 : \\ \textcircled{3} \text{ selon } \hat{e}_3 : \end{aligned} \quad (12.61)$$

le long des axes principaux d'inertie pour obtenir les équations de l'air. Alors, la première équation de l'air, selon le premier axe principal d'inertie, c'est la composante, selon cette axe, de la somme des moments de force extérieure évalués par rapport au centre de masse qui va alors être produit. Du moment d'inertie correspondant, selon ce premier axe, faut la dérivé temporelle du vecteur vitesse angulaire, plus, la différence entre IG3 et IG2 qui multiplie omega3 fois omega2. Ensuite, la somme des moments de force extérieure évaluée par rapport à G, selon le deuxième axe principal d'inertie, c'est le moment d'inertie correspondant, faut la dérivé temporelle du vecteur vitesse angulaire, selon cette axe, plus, la différence entre les moments d'inertie des axes principaux orthogonaux, c'est-à-dire IG1 moins IG3, qui multiplie des composantes des vitesses angulaires omega1 fois omega3. Et ensuite, la somme des moments de force extérieure,

notes

résumé

127m 41s



- Théorème du moment cinétique :

$$\sum M_G^{\text{ext}} = \dot{L}_G \quad (12.32)$$

- Equations d'Euler : (12.58) et (12.59) dans (12.32)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ selon } \hat{e}_1 : \sum M_{G,1}^{\text{ext}} &= I_{G,1} \dot{\Omega}_1 + (I_{G,3} - I_{G,2}) \Omega_2 \Omega_3 \\ \textcircled{2} \text{ selon } \hat{e}_2 : \sum M_{G,2}^{\text{ext}} &= I_{G,2} \dot{\Omega}_2 + (I_{G,1} - I_{G,3}) \Omega_1 \Omega_3 \\ \textcircled{3} \text{ selon } \hat{e}_3 : \sum M_{G,3}^{\text{ext}} &= I_{G,3} \dot{\Omega}_3 + (I_{G,2} - I_{G,1}) \Omega_1 \Omega_2 \end{aligned} \quad (12.60)$$

- Théorème du centre de masse :

$$\sum F^{\text{ext}} = \dot{P} = M \dot{V}_G \quad (12.15)$$

- Equations du mouvement :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ selon } \hat{e}_1 : \sum F_1^{\text{ext}} &= M \dot{V}_{G,1} \\ \textcircled{2} \text{ selon } \hat{e}_2 : \sum F_2^{\text{ext}} &= M \dot{V}_{G,2} \\ \textcircled{3} \text{ selon } \hat{e}_3 : \sum F_3^{\text{ext}} &= M \dot{V}_{G,3} \end{aligned} \quad (12.61)$$

Dr. Sylvain Bréchet

12 - Cinématique et dynamique du solide indéformable

38 / 38

évaluée par rapport à G, le long du troisième axe principal d'inertie, c'est le moment d'inertie, le long de cette axe, faut la dérivé temporelle de omega3, plus, la différence entre IG2 et IG1 qui multiplie le produit de omega2 fois omega1. Je vous promets, il n'y a rien de plus. Mais c'est déjà pas mal. OK. Alors, pour comprendre réellement ce que ça signifie, on va faire quelque chose qui va être éclairant. On va prendre le théorème du moment scientifique et on va le projeter selon ses mêmes axes principaux d'inertie. On aura alors la somme des forces extérieures, projeter selon ce premier axe, qui est le produit de la masse du sol indéformable, faut la dérivé temporelle de la composante de la vitesse du centre de masse selon cette axe. Ensuite, selon le deuxième axe, on a la composante de la somme des forces extérieures, le produit de la masse, faut la dérivé temporelle de la composante de la vitesse du centre de masse selon ce deuxième axe. Et finalement, on a une structure absolument similaire, le long du troisième axe. Bon, qu'est-ce qui différencie concrètement ces équations pour la rotation propre et le mouvement du centre de masse ? Il y a deux choses qui les distinguent. La première et la partie centrale, c'est qu'en rotation, les moments d'inertie qui jouent le même rôle que la masse vont être différents selon les trois axes, puisqu'un sol indéformable n'est pas symétrique dans l'espace à trois dimensions. Donc IG1 est différent d'IG2 qui est différent d'IG3. On n'a pas M1, M2, M3. On a une seule masse, parce qu'on décrit le mouvement d'un point. C'est symétrique dans les trois directions d'espace. D'accord ? Et donc, P est collinaire AVG. On n'a pas ces termes de précession qui viennent justement du fait que les moments d'inertie sont différents selon les différents axes, puisque si ils étaient égaux, ces termes

notes

résumé

128m 43s



- Théorème du moment cinétique :

$$\sum M_G^{\text{ext}} = \dot{L}_G \quad (12.32)$$

- Equations d'Euler : (12.58) et (12.59) dans (12.32)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ selon } \hat{e}_1 : \sum M_{G,1}^{\text{ext}} &= I_{G,1} \dot{\Omega}_1 + (I_{G,3} - I_{G,2}) \Omega_2 \Omega_3 \\ \textcircled{2} \text{ selon } \hat{e}_2 : \sum M_{G,2}^{\text{ext}} &= I_{G,2} \dot{\Omega}_2 + (I_{G,1} - I_{G,3}) \Omega_1 \Omega_3 \\ \textcircled{3} \text{ selon } \hat{e}_3 : \sum M_{G,3}^{\text{ext}} &= I_{G,3} \dot{\Omega}_3 + (I_{G,2} - I_{G,1}) \Omega_1 \Omega_2 \end{aligned} \quad (12.60)$$

- Théorème du centre de masse :

$$\sum F^{\text{ext}} = \dot{P} = M \dot{V}_G \quad (12.15)$$

- Equations du mouvement :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ selon } \hat{e}_1 : \sum F_1^{\text{ext}} &= M \dot{V}_{G,1} \\ \textcircled{2} \text{ selon } \hat{e}_2 : \sum F_2^{\text{ext}} &= M \dot{V}_{G,2} \\ \textcircled{3} \text{ selon } \hat{e}_3 : \sum F_3^{\text{ext}} &= M \dot{V}_{G,3} \end{aligned} \quad (12.61)$$

disparaîtraient et Omega sera alors automatiquement collinaire ALG. D'accord ? Voilà la différence concrète entre le mouvement de rotation propre et le mouvement du centre de masse. Alors, ces équations, on peut les utiliser, on va les utiliser, par exemple, pour décrire le mouvement d'une toupie. On a tout ce qu'il faut pour pouvoir le faire. Alors, en guise de conclusion, j'aimerais vous montrer quelque chose d'assez joli. Il faut que j'éteigne la lumière pour y arriver. Alors, hop. On va même carrément muter ici les deux... Attendez, voilà. Je vais muter les écrans. J'ai ici un morceau de... un morceau de... c'est une sorte de sagesse, en fait. D'accord ? Alors, il y a une pile et il y a des leds. Alors, dans un premier temps, je vais allumer la led qui est au centre. Attendez, c'est l'autre. Je vais faire ça. Voilà. Non. OK. Cela est au centre géométrique de ma plaque. Seulement, voilà. La plaque est laquée parce qu'il y a une pile. Et donc, ça, ce n'est pas le centre de masse. Donc, quand je la lance, vous allez voir qu'on va avoir un mouvement assez particulier avec un mouvement de rotation autour du centre de masse et un mouvement parabolique pour le centre de masse. Regardez. Faut que je lance un peu plus loin. Attendez, je fais comme ça. Voilà. Voyez ? Donc, ça, c'est le premier cas de figure. Alors, maintenant, si je prends le vrai centre de masse, il est évidemment décalé. Donc, je vais allumer la led correspondante. Attendez. Non, ce n'est pas cela. C'est donc cela. Voilà. Si je lance maintenant, le centre de masse, lui, va avoir un mouvement qui va se faire, évidemment, selon une parabole, comme pour un premier matériel. Regardez. Oui, alors, il y a eu un petit mouvement de... D'accord ? Voilà. Hop. Bon, après, il y a des mouvements de convection, mais vous avez

notes

résumé

- Théorème du moment cinétique :

$$\sum M_G^{\text{ext}} = \dot{L}_G \quad (12.32)$$

- Equations d'Euler : (12.58) et (12.59) dans (12.32)

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ selon } \hat{e}_1 : \sum M_{G,1}^{\text{ext}} &= I_{G,1} \dot{\Omega}_1 + (I_{G,3} - I_{G,2}) \Omega_2 \Omega_3 \\ \textcircled{2} \text{ selon } \hat{e}_2 : \sum M_{G,2}^{\text{ext}} &= I_{G,2} \dot{\Omega}_2 + (I_{G,1} - I_{G,3}) \Omega_1 \Omega_3 \\ \textcircled{3} \text{ selon } \hat{e}_3 : \sum M_{G,3}^{\text{ext}} &= I_{G,3} \dot{\Omega}_3 + (I_{G,2} - I_{G,1}) \Omega_1 \Omega_2 \end{aligned} \quad (12.60)$$

- Théorème du centre de masse :

$$\sum F^{\text{ext}} = \dot{P} = M \dot{V}_G \quad (12.15)$$

- Equations du mouvement :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{ selon } \hat{e}_1 : \sum F_1^{\text{ext}} &= M \dot{V}_{G,1} \\ \textcircled{2} \text{ selon } \hat{e}_2 : \sum F_2^{\text{ext}} &= M \dot{V}_{G,2} \\ \textcircled{3} \text{ selon } \hat{e}_3 : \sum F_3^{\text{ext}} &= M \dot{V}_{G,3} \end{aligned} \quad (12.61)$$

compris l'idée. D'accord ? Sur ce, je vous souhaite un très bon appétit et on se retrouve à trois heures pour les applications d'au-dessus... Deuxième chapitre de cours. Bonjour. Vous avez une question pour le gyroscope ? Oui, oui. Pour le gyroscope, un seul ici ? Oui.

notes

résumé